

FÍSICA

Pruebas de Acceso a la Universidad (Selectividad)

José Mª Lucas Carrazoni
Cándido Román Vallejo



FÍSICA

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD (SELECTIVIDAD)

JOSÉ Mª LUCAS CARRAZONI
CÁNDIDO ROMÁN VALLEJO



© De la edición: Editorial Tébar® - Casa Editorial Mares, S.L.
Tfno.: 91 373 44 94
Fax: 91 316 69 52
www.editorialtebar.com

Diseño de la portada: Omega

I.S.B.N.: 84-95447-31-2
Depósito Legal: AB-281-2001

Imprime: Reproducciones Gráficas Albacete

ÍNDICE ANALÍTICO

INTRODUCCIÓN

El objetivo principal de la Física, como el de todas las ciencias de la naturaleza es comprender ésta, poner orden en el amplio campo de los fenómenos tal y como aparecen ante la observación humana.

Dentro de esta comprensión de la naturaleza, la Física se ha centrado en la interpretación del espacio y el tiempo, y el estudio de la materia.

Su papel educativo en el Bachillerato, a parte de profundizar en los conocimientos adquiridos en cursos anteriores, es el de presentar a los alumnos la importancia que tienen los intentos de construir imágenes de la realidad para el desarrollo de la Física y reflexionar sobre el papel desempeñado por las diferentes teorías y paradigmas físicos.

El carácter formativo del Bachillerato, por otro lado, hace necesario que también esta materia contribuya a la formación de ciudadanos críticos y, por ello debe incluir aspectos de formación cultural, como las complejas interacciones ciencia-tecnología-sociedad o la forma de tratar del científico. En el Bachillerato, la Física acentúa su carácter orientador y preparatorio en orden a estudios posteriores.

El desarrollo de esta materia ha de contribuir a que las alumnas y alumnos adquieran las siguientes capacidades:

- Comprender los principales conceptos de la Física y su articulación en las leyes, teorías y modelos, valorando el papel que desempeñan en su desarrollo.
- Resolver problemas que se les planteen en la vida cotidiana, seleccionando y aplicando los conocimientos físicos relevantes.

Para contribuir a alcanzar estas capacidades hemos creado el siguiente libro de cuestiones y problemas de Física de 2° de Bachillerato con los siguientes aspectos más notables:

1°. Al principio de cada capítulo hay un pequeño resumen de teoría que clarifica y desmenuza todos los conceptos que posteriormente aparecen en los problemas.

2°. De cada ejercicio se desarrolla una introducción indicando las leyes o ecuaciones aplicadas, para que resulte más sencillo el entendimiento de éste.

3°. Si el problema lo requiere por la dificultad que presenta, realizamos un pequeño dibujo que ayude a la comprensión del mismo.

4°. Todos los ejercicios que aparecen en el presente libro, han sido recogidos de pruebas realizadas para el acceso a la Universidad desde el curso 92-93 hasta el 99-00.

5º. El libro de cuestiones y problemas de Física está dirigido a alumnos de 2º de Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud o Bachillerato Tecnológico.

6º. El número total de temas que trata el libro es de siete:

1. Vibraciones y Ondas
2. Óptica
3. Campo Gravitatorio
4. Campo Eléctrico
5. Campo Magnético e Inducción Electromagnética
6. Física Cuántica
7. Física Nuclear

7ª. En cada uno de los temas se indica el número de cuestiones o ejercicios resueltos.

8º. Inicialmente en cada capítulo se da una relación de los ejercicios que posteriormente se van a solucionar, con los resultados finales de cada apartado.

9º. Todas las soluciones de cada cuestión quedan debidamente resaltadas mediante un recuadro al final de cada punto.

10º. Los dibujos que aparecen en los diferentes problemas de éste libro han sido bordeados y sombreados para mejorar su estética visual.

11º. De cada cuestión o problema se indica su puntuación y el año que salió en Selectividad o Prueba de acceso a la Universidad.

TEMA 1

VIBRACIONES Y ONDAS

RESUMEN TEÓRICO DEL TEMA

1. Características de una onda

- **Longitud de onda** (λ): 1ª) Distancia que se ha propagado la onda en un período. 2ª) Distancia entre dos puntos consecutivos de una onda que están en el mismo estado de vibración. 3ª) Distancia entre dos pulsos sucesivos.
- **Período** (T): 1ª) Tiempo que transcurre entre dos pulsos sucesivos. 2ª) Tiempo que el foco emisor ha tardado en efectuar una vibración completa.
- **Amplitud** (A): 1ª) Distancia máxima que separa un punto de la onda de su posición de equilibrio. 2ª) Físicamente representa el valor máximo que alcanza la perturbación que se propaga.
- **Frecuencia** (f): Representa el número de pulsos producidos en la unidad de tiempo, se mide en ciclos/s o Herz. ($f = 1/T$).
- **Frecuencia angular** (ω): Magnitud relacionada con la frecuencia mediante la expresión

$$\omega = 2\pi f$$

- **Velocidad de propagación** (v): Depende de la elasticidad del medio y de su rigidez, también recibe el nombre de velocidad de fase. Si admitimos que los diferentes pulsos se propagan con la misma velocidad ($v = l/T$).
- **Número de onda** (K): Representa el número de longitudes de onda u ondas completas contenidas en una longitud 2π metros. ($K = 2\pi/\lambda$).

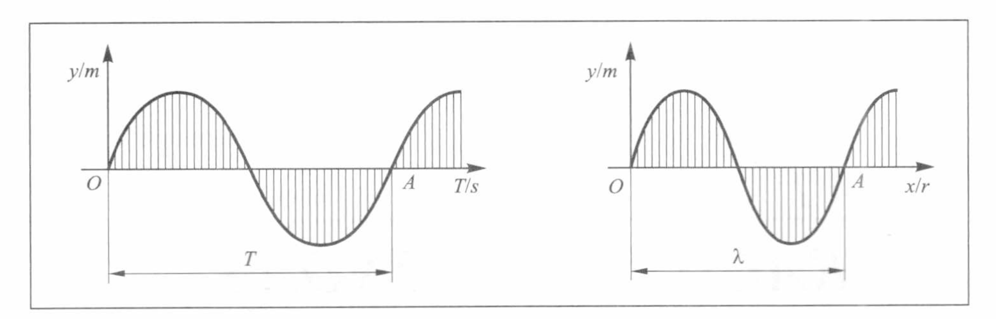
2. Ondas armónicas unidimensionales

Son aquellas en las que todos los puntos del medio poseen un movimiento armónico simple.

La ecuación que describe el movimiento de cualquier punto será:

$$\psi\ (x, t) = A \text{ sen } (wt - kx + \delta)$$

al término $(wt - kx + \delta)$ se denomina **fase de la onda**.



Se denomina "**frente de ondas**" a la línea de puntos alcanzados por la perturbación en un instante determinado. Según la forma geométrica de este frente se habla de ondas circulares, planas esféricas, etc.

A menudo resulta conveniente, sobre todo en el caso de las ondas electromagnéticas, hablar de "rayo" en lugar de frente de ondas. El rayo se define como la perpendicular al frente de ondas.

3. Energía e intensidad de una onda

Si admitimos que no existe ningún tipo de rozamiento, la energía que transmite una onda es directamente proporcional al cuadrado de su amplitud y de su frecuencia.

$$E_m = \frac{1}{2} kA^2 = 2m\pi^2 f^2 A^2$$

Se llama intensidad de un movimiento ondulatorio en un punto, a la cantidad de energía que atraviesa perpendicularmente la unidad de superficie colocada en dicho punto en la unidad de tiempo.

$$I = \frac{E}{St} = \frac{P}{S} \qquad \text{se mide en W/m}^2$$

Para ondas esféricas:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{A_1^2}{A_2^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

a) La intensidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco emisor.
b) La intensidad es directamente proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda.

Se entiende por **absorción** la disminución de intensidad que experimenta un movimiento ondulatorio al propagarse por un medio (las ondas ceden energía al medio).

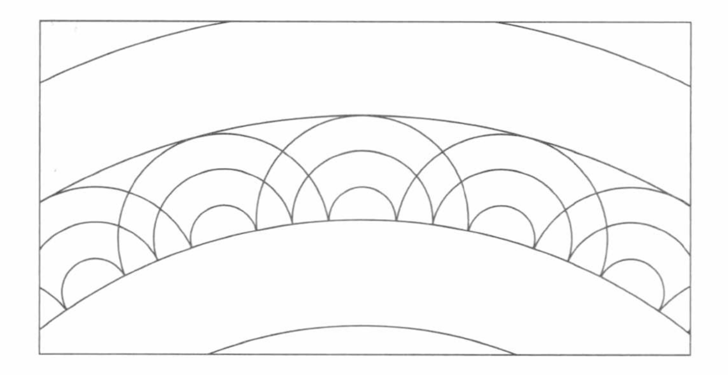
Experimentalmente, la intensidad de las ondas planas disminuye exponencialmente con el espesor atravesado.

$$I = I_0 e^{-\beta x}$$

donde I_0 e I son las intensidades de la onda antes y después de atravesar un espesor x del material caracterizado por su **coeficiente de absorción**. **La unidad de** β en el S.I. es m^{-1}.

4. Principio de Huygens

Todo punto de un frente de onda es centro emisor de nuevas ondas elementales cuya envolvente es el nuevo frente de onda.



5. Interferencia de ondas en el espacio

Se dice que dos focos son coherentes cuando oscilan con la misma fase. Sean dos focos coherentes emisores de las ondas armónicas que tienen la misma frecuencia y la misma velocidad de propagación.

La diferencia de fase entre ambas ondas cuando alcance un punto P será:

$$\delta = \phi_2 - \phi_1 = (wt - kx_2) - (wt - kx_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - x_2)$$

Máximos de interferencia: La intensidad es máxima en los puntos cuya diferencia de distancias a los focos emisores es igual a un número entero de longitudes de onda.

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - x_2) = 2n\pi \quad \Rightarrow \quad x_1 - x_2 = n\lambda$$

Mínimos de interferencia: La intensidad es mínima en los puntos cuya diferencia de distancias a los focos es igual a un número impar de semilongitudes de onda.

$$x_1 - x_2 = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}$$

6. Ondas estacionarias

Una onda estacionaria es el resultado de la interferencia de dos ondas de igual frecuencia, velocidad de propagación y amplitud que avanzan en sentidos opuestos.

Si la ecuación de la onda que viaja hacia la derecha es de la forma:

$$y_1 = A \text{ sen } (wt - kx)$$

y la que viaja en sentido contrario:

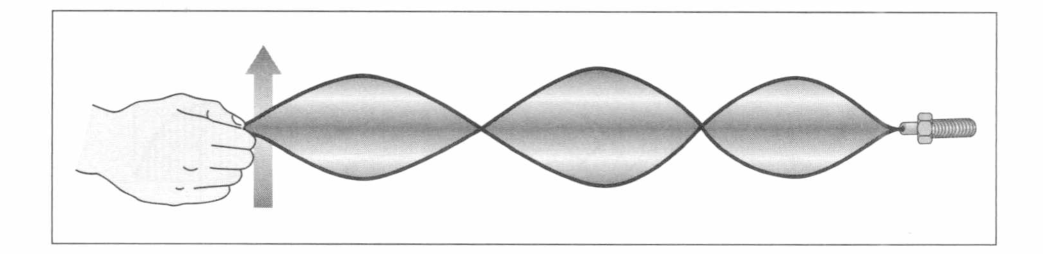
$$y_2 = A \text{ sen } (wt + kx)$$

utilizando la relación:

$$\text{sen } a + \text{sen } b = 2 \text{ sen } \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

la perturbación resultante será:

$$y = A\,(2 \text{ sen } wt \cos(-kx)) = 2\,A \cos kx \text{ sen } wt$$



Los puntos de máxima amplitud reciben el nombre de vientres o antinodos y los puntos de amplitud nula se llaman nodos.

La distancia entre dos vientres o dos nodos consecutivos es de $\lambda/2$.

7. Intensidad del sonido. Sonoridad

Distinta de la intensidad de un sonido es la **sensación sonora** o **sonoridad** (β) que produce en el oído humano. Éste no percibe doble sensación sonora en un sonido de doble intensidad, es decir, no existe proporcionalidad entre la intensidad de un sonido y la sensación sonora que produce. La sonoridad, expresada en decibelios (dB), viene dada por la expresión

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

Siendo I_0 la **intensidad umbral de audición para el oído humano**, es decir la intensidad mínima por debajo de la cual el oído no percibe sonido.

8. Efecto Doppler

Estudia el cambio en la frecuencia del sonido emitido por un foco sonoro, cuando el observador o el foco están en movimiento relativo.

Si tanto el observador como el foco se mueve con movimiento relativo

$$f_0 = f_F \frac{v \pm v_0}{v \pm v_F}$$

CUESTIONES Y EJERCICIOS DE VIBRACIONES Y ONDAS

1. Atenuación de una onda, definición y un ejemplo.

2. El sonido de la sirena de una fábrica tarda 10 s en llegar a un determinado receptor situado a una distancia equivalente a 5 000 veces la longitud de onda del sonido emitido. Calcula la frecuencia de dicho sonido. (Solución: 500 Hz)

3. Un observador situado a 120 m de una fuente sonora, que emite ondas esféricas mide una intensidad sonora de 0,15 W/m^2. ¿Qué intensidad sonora medirá un observador situado a 60 m? (Solución: 0,6 W/m^2)

4. Una onda sinusoidal se propaga en un medio elástico a lo largo del eje OX, en el sentido de las x crecientes. De ella conocemos las siguientes magnitudes; amplitud

de la oscilación (A = 10 m), frecuencia (ν = 300 Hz), y velocidad de propagación, (c = 1 200 m/s).

a) Sabiendo que en el instante inicial en el origen de coordenadas la función de onda vale 5 m y que la velocidad es negativa, calcula la fase inicial ϕ_0. Da el resultado en radianes. (Solución: $\phi_0 = 5\pi/6$ rad)
b) Calcula en un cierto instante fijo, la diferencia de fase entre dos puntos del eje OX separados 5 m. Da el resultado en radianes. (Solución: $\Delta\varphi = 5\pi/2$ rad)
c) Calcula la velocidad máxima de una cualquiera de las partículas del medio elástico. (Solución: $v_{máx}$ = 6 000 π m/s)

5. De una onda estacionaria con los dos extremos fijos sabemos que los antinodos están separados 1,5 m. Calcula la longitud de onda de las ondas sinusoidales que interfieren para dar lugar a dicha onda estacionaria. (Solución: 3 m)

6. De una onda sinusoidal sabemos que tiene una longitud de onda λ. Supongamos un cierto instante fijo. ¿Cuánto están separados los puntos entre los que existen una diferencia de fase de π radianes es decir, en oposición de fase? Da la respuesta en función de λ. (Solución: $\lambda/2$)

7. La amplitud y la frecuencia de una onda transversal que se propaga a lo largo de una cuerda son, respectivamente, 0,8 m y 6 Hz. Calcula la velocidad máxima de vibración de una partícula cualquiera de la cuerda. (Solución: $v_{máx} = 9{,}6\pi$ m/s)

8. Si nos colocamos a 8 m de un altavoz escuchamos el sonido con una intensidad sonora de $6{,}4 \cdot 10^{-5}$ W/m^2. Si nos alejamos hasta colocarnos a una distancia d del mismo altavoz, la intensidad sonora con la que oímos el mismo sonido es $0{,}4 \cdot 10^{-5}$ W/m^2. Calcula la distancia d. (Solución: 32 m)

9. Por una cuerda se propaga una onda transversal de frecuencia 50 Hz. La diferencia de fase entre dos puntos separados 2,5 cm es $\pi/3$ radianes en un cierto instante fijo. Calcula la diferencia de fase entre los estados de vibración de un mismo punto cuando han transcurrido 0,45 s. (Solución: 45π)

10. Un submarino dedicado a la investigación del fondo del mar dispone de un generador de ondas ultrasónicas con frecuencia $\nu = 2{,}5 \cdot 10^8$ Hz y con longitud de onda $\lambda = 4{,}8 \cdot 10^{-4}$ m. Se emite una señal hacia el fondo del mar y tras rebotar el eco se recibe cuando ha transcurrido 18,39 s. Calcula la profundidad del mar en ese punto. Supóngase que λ no varía con la profundidad. (Solución: 11 034 m)

11. Una onda transversal se propaga en un medio elástico y de ella conocemos los siguientes datos: 40 Hz de frecuencia y 100 m/s de velocidad de propagación. Calcula la diferencia de fase entre dos puntos del espacio separados 4 m y en un instante fijo, por ejemplo t = 3 s. (Solución: $16\pi/5$ rad)

12. Una onda armónica sinusoidal viene dada por $y(x, t) = 8 \text{ sen } (3x + 7t)$ en el Sistema Internacional. ¿Cuánto tiempo tarda esta perturbación en recorrer 35 m? (Solución: 105/7 s)

13. Supongamos que la función de onda $y(x, t) = 6 \text{ sen } (20x + 4t - \pi/3)$ en el S.I, describe una onda que se propaga a lo largo de una cuerda.

a) Calcula la longitud de onda, la frecuencia, la velocidad y el sentido de propagación de esta onda. (Solución: $\pi/10$ m; $2/\pi$ Hz; 0,02 ms^{-1})
b) ¿En qué instante tiene esta onda un máximo en $x = 0$? (Solución: 0,65 s)
c) ¿Cuál es el significado físico de $\pi/3$ que aparece en la función de onda?

14. Dos coches van circulando uno detrás del otro en la misma dirección, mismo sentido y con las mismas velocidades. Si uno de los conductores hace sonar el claxon de su coche, ¿el otro lo oiría con una frecuencia diferente a la que oiría si estuviera parado? Justifica tu respuesta. (Solución: $f_0 = f_F$)

15. Por una cuerda se propaga la siguiente onda $y(x, t) = 0{,}25$ sen $(6{,}28t - 3{,}14x)$ en el S.I.

a) ¿En qué sentido y con qué velocidad se mueve la onda?
b) Calcula la longitud de onda y la frecuencia. (Solución: 1 Hz; 2 m)
c) La velocidad y la aceleración máxima de una partícula de la cuerda que se encuentra en $x = 5$ m. (Solución: 1,57 m/s; 9,86 m/s^2)

16. La intensidad sonora, I, producida por un altavoz de alta fidelidad de los que probablemente tengas en casa, no viene dada por $I = P/(4\pi \cdot r^2)$ siendo P la potencia sonora emitida por el altavoz y r la distancia medida desde el altavoz. Da razones por las que esta relación no se cumple.

17. Una onda armónica sinusoidal se propaga en el sentido positivo del eje OX con una frecuencia de 100 Hz, con una velocidad de 500 m/s y tiene una amplitud de 15 cm. Calcula:

a) La ecuación de onda más general. (Solución: $y = 0{,}15$ sen $(200\pi \cdot t - 2\pi/5 \cdot x)$)
b) La separación entre dos puntos cuya diferencia de fase, en un instante, es de $\pi/5$ radianes. (Solución: 0,5 m)

18. El oído humano normal es capaz de oír sonidos con frecuencias comprendidas entre 20 y 20 000 Hz. ¿Crees que puedes oír sonidos que tengan longitud de onda mayor que el diámetro del orificio de entrada a tu propio oído (alrededor de 1 cm)? Calcula las longitudes de onda correspondientes a los sonidos que podemos escuchar y responde a la pregunta que se te hace. (Dato: velocidad de propagación del sonido en el aire a 15 °C, $v = 340$ m/s). (Solución: 17 m; 1,7 cm)

19. Una onda sinusoidal transversal que se propaga de derecha a izquierda tiene una longitud de onda de 10 m, una amplitud de 2 m y una velocidad de propagación de 400 cm/s. Halla:

a) La ecuación de la onda. (Solución: $y = 2$ sen $(0{,}8\pi \cdot t - 0{,}2\pi \cdot x)$)
b) La diferencia de fase en un instante dado entre dos puntos separados entre sí 2 m. (Solución: $0{,}4\pi$ rad)
c) La diferencia de fase en mismo punto cuando han transcurrido 10 s. (Solución: 8π rad)

20. Señala cuales de las siguientes opciones son verdaderas y cuales falsas. La energía de un movimiento ondulatorio aumenta al:

a) Aumentar la amplitud.
b) Disminuir la frecuencia.
c) Aumentar la velocidad de propagación.
d) Aumentar la frecuencia.

21. Un extremo de una cuerda tensa horizontal de 4 m de longitud tiene un movimiento oscilatorio armónico de dirección vertical; en el instante 0,3 s la elongación de ese extremo es 2 cm. Se mide que la perturbación tarda en llegar de un extremo al otro de la cuerda 0,9 s y que la distancia entre dos mínimos consecutivos es 1 m. Calcular:

a) La amplitud del movimiento ondulatorio. (Solución: 0,023 m)

b) La velocidad del punto medio de la cuerda en el instante $t = 1$ s. (Solución: –0,611 m/s)
c) El desfase entre dos puntos separados 1,5 m, en un instante dado. (Solución: 3π rad)

22. El efecto Doppler es un fenómeno ondulatorio que consiste en la dependencia de la frecuencia percibida por un observador respecto a:

a) La intensidad del movimiento ondulatorio.
b) La velocidad de propagación de la onda.
c) El movimiento relativo entre el foco y el observador.
d) La distancia entre el foco y el observador.

23. Una onda sinusoidal transversal que se propaga de izquierda a derecha tiene una longitud de onda de 20 m, una amplitud de 4 m y una velocidad de propagación de 200 m/s. Calcula:

a) La ecuación de la onda (supóngase la fase inicial cero). (Solución: $y(x, t) = 4 \text{ sen } (20\pi \cdot t - 0{,}1\pi \cdot x)$)
b) La velocidad transversal máxima de un punto afectado por la vibración. (Solución: 80π m/s)
c) La diferencia de fase, en un instante dado, entre dos puntos separados una distancia de 5 m. (Solución: $\pi/2$ rad)

24. Un instrumento musical emite un sonido de 70 dB. ¿Cuántos instrumentos deben sonar juntos para producir una sonoridad de 90 dB? ($\log a + \log b = \log (a/b)$). (Solución: 100)

25. Una onda transversal se propaga por una cuerda según la ecuación $y = 0{,}4 \text{ sen } \pi \cdot (50t - 0{,}5x)$, en unidades del S.I. Calcula:

a) La frecuencia, la longitud de onda y velocidad de propagación de la onda. (Solución: 25 Hz; 4 m; 100 m/s)
b) La velocidad transversal de una partícula situada a 20 m del foco en el instante $t = 0{,}5$ seg. (Solución: -20π m/s)
c) La diferencia de fase, en un instante dado, entre dos puntos separados una distancia de 2 m. (Solución: π rad)

26. La frecuencia de una nota musical es 440 Hz. Hallar la longitud de onda del sonido correspondiente cuando se propaga en el aire ($v = 340$ m/s) y cuando lo hace en el agua ($v = 144$ m/s). (Solución: 0,773 m; 0,327 m)

27. Una onda armónica se propaga por un medio elástico según la ecuación $y = 2 \text{ sen } (4\pi t - \pi x)$ donde x está medida en metros y t en s. Hallar:

a) La frecuencia, longitud de onda y la velocidad de propagación de la onda. (Solución: 2 Hz; 2 m)
b) La velocidad transversal de una partícula situada a 1 m del foco en $t = 0{,}5$ s. (Solución: -8π m/s)
c) Calcula la elongación de un punto que se encuentra en $x = 0$ para un tiempo t. (Solución: 0 m)

28. ¿Cuál es la longitud de la onda asociada a un electrón ($m = 9 \cdot 10^{-31}$ kg) que se mueve con una velocidad de $2 \cdot 10^4$ m/s? $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J · s. (Solución: 36,4 nm)

29. Expresa como varía la intensidad y la amplitud de una onda esférica con la distancia al foco emisor (se supone que no hay absorción).

CUESTIONES Y EJERCICIOS RESUELTOS DE VIBRACIONES Y ONDAS

1

Junio 97 - 1 punto

Atenuación de una onda, definición y un ejemplo.

La energía se distribuye entre un mayor número de partículas a medida que avanza la onda. Este fenómeno recibe el nombre de **atenuación**, o disminución natural de la energía.

Por ejemplo, si tenemos una onda esférica que se propaga desde el foco emisor F que emite una potencia P, la intensidad en punto B, situado a una distancia r de F sería:

$$\boxed{I = \frac{P}{4\pi r^2}}$$

2

Junio 97 - 1 punto

El sonido de la sirena de una fábrica tarda 10 s en llegar a un determinado receptor situado a una distancia equivalente a 5 000 veces la longitud de onda del sonido emitido. Calcula la frecuencia de dicho sonido.

Datos: $\begin{cases} \Delta t = 10 \text{ s} \\ \Delta x = 5\,000\,\lambda \text{ m} \end{cases}$ Incógnita: f

El sonido se propaga en el aire (suponiendo medio isótropo y homogéneo) con m.r.u. Así pues:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (1)$$

Además por tratarse de un movimiento ondulatorio:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2):

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \lambda \cdot f$$

Sustituyendo los datos:

$$\frac{5\,000\,\lambda}{10} = \lambda \cdot f$$

Resultado:

$$\boxed{f = 500 \text{ Hz}}$$

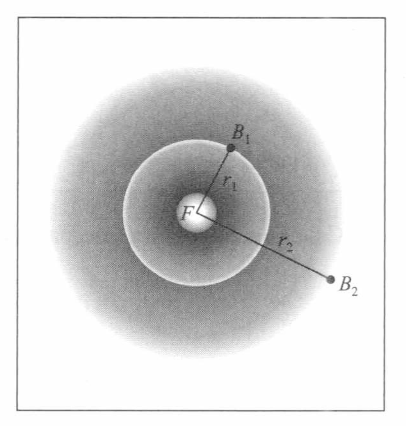
3

Septiembre 97 - 1 punto

Un observador situado a 120 m de una fuente sonora, que emite ondas esféricas mide una intensidad sonora de 0,15 W/m^2. ¿Qué intensidad sonora medirá un observador situado a 60 m?

Si consideramos dos superficies esféricas a las distancias r_1 y r_2 del foco emisor, la intensidad en cada superficie será:

$$I_1 = \frac{P}{4\pi r_1^2}; \qquad I_2 = \frac{P}{4\pi r_2^2}$$



De donde se deduce:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

Sustituyendo los datos del problema:

$$I_1 = \frac{0{,}15 \cdot 120^2}{60^2} = 0{,}6 \text{ W/m}^2$$

4

Septiembre 97 - 5 puntos

Una onda sinusoidal se propaga en un medio elástico a lo largo del eje OX, en el sentido de las x crecientes. De ella conocemos las siguientes magnitudes; amplitud de la oscilación (A = 10 m), frecuencia (ν = 300 Hz), y velocidad de propagación, (c = 1 200 m/s).

a) Sabiendo que en el instante inicial en el origen de coordenadas la función de onda vale 5 m y que la velocidad es negativa, calcula la fase inicial ϕ_0. Da el resultado en radianes.
b) Calcula en un cierto instante fijo, la diferencia de fase entre dos puntos del eje OX separados 5 m. Da el resultado en radianes.
c) Calcula la velocidad máxima de una cualquiera de las partículas del medio elástico.

a) La función de onda para cada punto del medio en función del tiempo viene dada por:

$$y(x, t) = A \text{ sen } (\omega t - kx + \phi_0)$$

Calculamos las magnitudes frecuencia angular ω, y número de ondas K.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu = 600\pi \text{ rad/s}$$

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{c \cdot T} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{\pi}{2} \text{ m}^{-1}$$

Sustituyendo los datos obtenidos en la función de onda resulta:

$$y(x,t) = 10\,\text{sen}\left(600\pi t - \frac{\pi}{2}x + \phi_0\right)$$

Sabemos que en instante inicial en el origen de coordenadas la función de onda vale 5 m:

$$5 = 10\,\text{sen}\left(600\pi \cdot 0 - \frac{\pi}{2} \cdot 0 + \phi_0\right) \Rightarrow \text{sen}\,\phi_0 = \frac{1}{2}$$

$$\phi_0 \text{ tiene dos soluciones: } \begin{cases} 30^\circ = \dfrac{\pi}{6} \\ 150^\circ = \dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$$

Calculamos la velocidad para cada uno de estos resultados:

$$v(0,0) = 6\,000\,\pi \cos\left(600\pi \cdot 0 - \frac{\pi}{2} \cdot 0 + \frac{\pi}{6}\right) = 1\,632{,}4 \text{ m/s}$$

$$v(0,0) = 6\,000\,\pi \cos\left(600\pi \cdot 0 - \frac{\pi}{2} \cdot 0 + \frac{5\pi}{6}\right) = -1\,632{,}4 \text{ m/s}$$

Como la velocidad debe ser negativa

$$\boxed{\phi_0 = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}}$$

b) Se denomina fase de la onda al término $(wt - Kx + \phi_0)$.

Para un cierto instante la diferencia de fase entre dos puntos vendrá dada por:

$$\boxed{\Delta\varphi = K(x_2 - x_1) = \frac{\pi}{2} \cdot 5 = \frac{5\pi}{2} \text{ rad}}$$

c) La velocidad de vibración de un punto del medio alcanzado por la onda la obtenemos derivando la función de onda:

$$v = \frac{dy}{dt} = 6\,000\,\pi \cos\left(600\pi t - \frac{\pi}{2}x + \frac{5\pi}{6}\right)$$

Siendo la velocidad máxima:

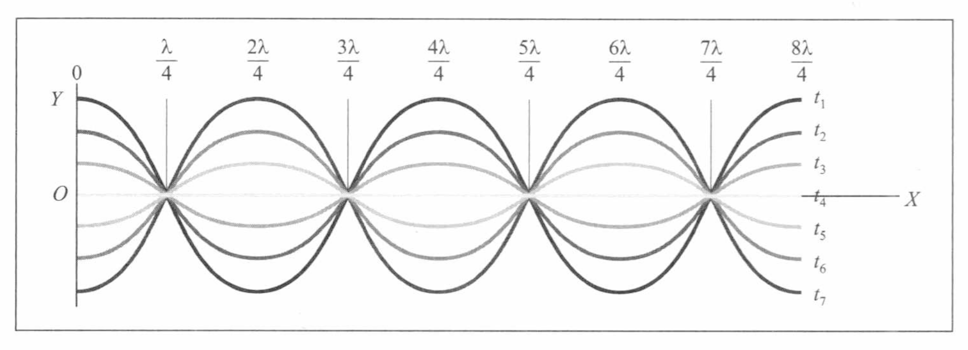
$$\boxed{v_{\text{máx}} = 6\,000\,\pi \text{ m/s}}$$

5

Junio 98 - 1 punto

De una onda estacionaria con los dos extremos fijos sabemos que los antinodos están separados 1,5 m. Calcula la longitud de onda de las ondas sinusoidales que interfieren para dar lugar a dicha onda estacionaria.

En una onda estacionaria la distancia entre dos nodos o vientres consecutivos es igual a $\lambda/2$.

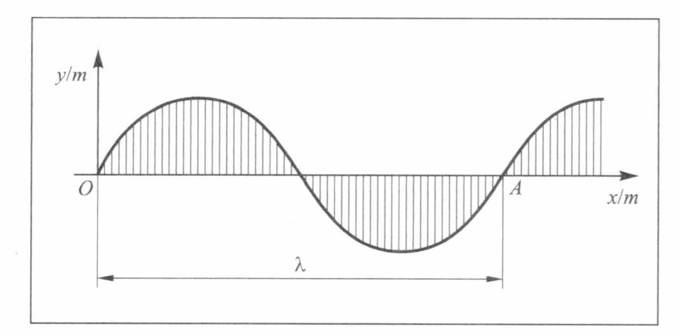


Sustituyendo los datos:

$$\frac{\lambda}{2} = 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 3 \text{ m}$$

6 *Junio 98 - 1 punto*

De una onda sinusoidal sabemos que tiene una longitud de onda λ. Supongamos un cierto instante fijo. ¿Cuánto están separados los puntos entre los que existen una diferencia de fase de π radianes es decir, en oposición de fase? Da la respuesta en función de λ.



La fase de una onda armónica que se propaga de izquierda a derecha vale:

$$\phi = w \cdot t - k \cdot x + \delta$$

Por tanto, para un instante determinado, la diferencia de fase entre dos puntos que disten $\Delta x = x_2 - x_1$, valdrá:

$$\Delta\phi = k \cdot \Delta x$$

Sustituyendo el dato ($\Delta\phi = \pi$ (rad)) y el valor de $k = 2\pi/\lambda$ resulta:

$$\Delta x = \frac{\Delta\phi}{k} = \frac{\lambda}{2}$$

7 *Septiembre 98 - 1 punto*

La amplitud y la frecuencia de una onda transversal que se propaga a lo largo de una cuerda son, respectivamente, 0,8 m y 6 Hz. Calcula la velocidad máxima de vibración de una partícula cualquiera de la cuerda.

Para una onda sinusoidal que se propaga en un medio elástico en el sentido del eje *OX* hacia la derecha, la velocidad de vibración de una partícula es de:

$$v = Aw \cos(wt - kx + \phi_0)$$

La velocidad será máxima cuando el cos $(wt - kx + f_0)$ sea igual a 1.

$$\boxed{v_{máx} = Aw = A \cdot 2\pi \cdot \nu = 0{,}8 \cdot 2\pi \cdot 6 = 9{,}6\pi \text{ m/s}}$$

8 *Septiembre 98 - 1 punto*

Si nos colocamos a 8 m de un altavoz escuchamos el sonido con una intensidad sonora de $6{,}4 \cdot 10^{-5}$ W/m^2. Si nos alejamos hasta colocarnos a una distancia *d* del mismo altavoz, la intensidad sonora con la que oímos el mismo sonido es $0{,}4 \cdot 10^{-5}$ W/m^2. Calcula la distancia *d*.

En un medio homogéneo e isótropo, los frente de onda del sonido son esféricos y prescindiendo de la absorción, su intensidad disminuye con el cuadrado de la distancia al foco emisor.

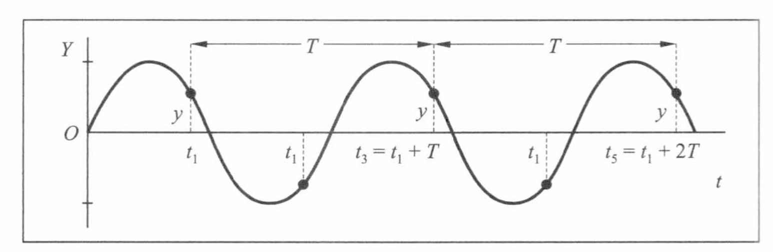
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} \Rightarrow \boxed{R_2 = \sqrt{\frac{I_1 \cdot R_1^2}{I_2}} = \sqrt{\frac{6{,}4 \cdot 10^{-5} \cdot 8^2}{0{,}4 \cdot 10^{-5}}} = 32 \text{ m}}$$

9 *Junio 99 - 1 punto*

Por una cuerda se propaga una onda transversal de frecuencia 50 Hz. La diferencia de fase entre dos puntos separados 2,5 cm es $\pi/3$ radianes en un cierto instante fijo. Calcula la diferencia de fase entre los estados de vibración de un mismo punto cuando han transcurrido 0,45 s.

La fase de una onda armónica unidimensional que se propaga de izquierda a derecha a lo largo de eje *OX*, viene dada por:

$$\phi = wt - kx + \delta$$



La diferencia de fase entre los estados de vibración de un mismo punto será:

$$\Delta\phi = w\,(t_2 - t_1) = 2\pi f\,(t_2 - t_1)$$

Sustituyendo datos obtenemos:

$$\boxed{\Delta\phi = 2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}45 = 45\pi \text{ rad}}$$

10 *Junio 99 - 1 punto*

Un submarino dedicado a la investigación del fondo del mar dispone de un generador de ondas ultrasónicas con frecuencia $\nu = 2{,}5 \cdot 10^8$ Hz y con longitud de onda $\lambda = 4{,}8 \cdot 10^{-4}$ m. Se emite una señal hacia el fondo del mar y tras rebotar el eco se recibe cuando ha transcurrido 18,39 s. Calcula la profundidad del mar en ese punto. Supóngase que λ no varía con la profundidad.

La distancia total recorrida por la onda ultrasónica es de $d = 2\,\Delta x$, siendo Δx la profundidad. Δt es el tiempo invertido en el camino de ida y vuelta.

Así pues, suponiendo un m.r.u.:

$$v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{2\,\Delta x}{\Delta t} \qquad (1)$$

Al mismo tiempo:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2) y despejando Δx:

$$\boxed{\Delta x = \frac{\lambda \cdot f \cdot \Delta t}{2} = 11\,304 \text{ m}}$$

11 *Septiembre 99 - 1 punto*

Una onda transversal se propaga en un medio elástico y de ella conocemos los siguientes datos: 40 Hz de frecuencia y 100 m/s de velocidad de propagación. Calcula la diferencia de fase entre dos puntos del espacio separados 4 m y en un instante fijo, por ejemplo $t = 3$ s.

Supongamos una onda armónica sinusoidal del tipo $y = A$ sen $(wt - k + \delta)$, siendo la fase de la onda para un punto determinado:

$$\phi_1 = (wt - kx_1 + \delta)$$

La diferencia de fase entre dos puntos en un instante determinado por ejemplo $t = 3$ s, será:

$$\Delta\phi = k\,(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) \qquad (1)$$

Como necesitamos λ, la averiguamos a partir de los datos iniciales:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{100}{40} = 2{,}5 \text{ m}$$

Sustituyendo el valor de λ obtenido en (1) queda:

$$\boxed{\Delta\phi = \frac{2\pi}{2{,}5} \cdot 4 = \frac{16\pi}{5} \text{ rad}}$$

12

Septiembre 99 - 1 punto

Una onda armónica sinusoidal viene dada por $y(x, t) = 8$ sen $(3x + 7t)$ en el Sistema Internacional. ¿Cuánto tiempo tarda esta perturbación en recorrer 35 m?

Se trata de una onda armónica unidimensional que se propaga de derecha a izquierda a lo largo del eje OX, siendo su expresión:

$$y(x, t) = A \text{ sen } (wt + kx)$$

Comparando con la ecuación del enunciado:

$$w = 7 = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{7} \text{ s}$$

$$K = 3 = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{3} \text{ m}$$

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{7}{3} \text{ m/s}$$

Suponiendo que la onda se propaga en un medio homogéneo con velocidad constante:

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{105}{7} \text{ s}}$$

13

Junio 97 - 3,75 puntos

Supongamos que la función de onda $y(x, t) = 6$ sen $(20x + 4t - \pi/3)$ en el S.I, describe una onda que se propaga a lo largo de una cuerda.

a) Calcula la longitud de onda, la frecuencia, la velocidad y el sentido de propagación de esta onda.
b) ¿En qué instante tiene esta onda un máximo en $x = 0$?
c) ¿Cuál es el significado físico de $\pi/3$ que aparece en la función de onda?

a) El sentido de propagación de la onda lo determina el signo del término en que aparece la "x". Como es positivo, significa que la onda se desplaza en **sentido decreciente del eje** OX.

Comparando la ecuación dada, con la ecuación general $y = A$ sen $(kx + wt + \delta)$:

$$w = 4 = 2\pi f \Rightarrow \boxed{f = \frac{4}{2\pi} = \frac{2}{\pi} \text{ Hz}}$$

$$K = 20 = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10} \text{ m}}$$

$$\boxed{v = \lambda \cdot f = \frac{\pi}{10} \cdot \frac{2}{\pi} = 0{,}2 \text{ m/s}}$$

b) La "$y(x, t)$" de la onda será máxima cuando sen $(wt + kx + \delta) = 1$; como se pide para $x = 0$:

$$\text{sen}\left(20 \cdot 0 + 4t - \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

De aquí se deduce que:

$$4t - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$$

El instante que nos piden es:

$$\boxed{t = \frac{5\pi}{24} = 0{,}65 \text{ s}}$$

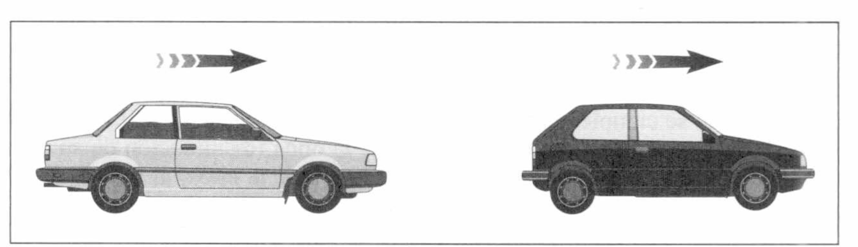
c) $\pi/3$ significa el valor de la fase inicial de la onda (ángulo descrito cuando empezamos a contar el movimiento).

14

Junio 97 - 1,25 puntos

Dos coches van circulando uno detrás del otro en la misma dirección, mismo sentido y con las mismas velocidades. Si uno de los conductores hace sonar el claxon de su coche, ¿el otro lo oiría con una frecuencia diferente a la que oiría si estuviera parado? Justifica tu respuesta.

Si ambos coches circulan en la misma dirección y sentido y con la misma velocidad, relativamente es como si estuvieran parados uno respecto al otro. De ahí que la frecuencia que percibiría el observador será la misma que emite el foco.



Aplicando la ecuación del efecto Doppler:

$$\boxed{f_0 = f_F \frac{v - v_0}{v - v_F} = f_F}$$

15

Septiembre 97 - 3,75 puntos

Por una cuerda se propaga la siguiente onda $y(x, t) = 0{,}25$ sen $(6{,}28t - 3{,}14x)$ en el S.I.

a) ¿En qué sentido y con qué velocidad se mueve la onda?
b) Calcula la longitud de onda y la frecuencia.
c) La velocidad y la aceleración máxima de una partícula de la cuerda que se encuentra en $x = 5$ m.

a) y **b)** Si comparamos la ecuación de la onda que se propaga por la cuerda con la ecuación general:

$$y = A \text{ sen } (wt - kx)$$

Obtenemos los siguientes valores para la longitud de onda y la frecuencia:

$$w = 2\pi f = 6{,}28 \Rightarrow \boxed{f = \frac{6{,}28}{2\pi} = 1 \text{ Hz}}$$

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} = 3{,}14 \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{3{,}14} = 2 \text{ m}$$

Como el término en x, que es el que controla el sentido de propagación de la onda, está afectado del signo "–", **la onda se propaga en el sentido creciente del eje** *OX*.

c) La velocidad y aceleración de un punto de la cuerda se pueden obtener de las expresiones:

$$\boxed{v_{\text{máx}} = A \cdot w = 0{,}25 \cdot 6{,}28 = 1{,}57 \text{ m/s}}$$

$$\boxed{a_{\text{máx}} = A \cdot w^2 = 0{,}25 \cdot 6{,}28^2 = 9{,}86 \text{ m/s}^2}$$

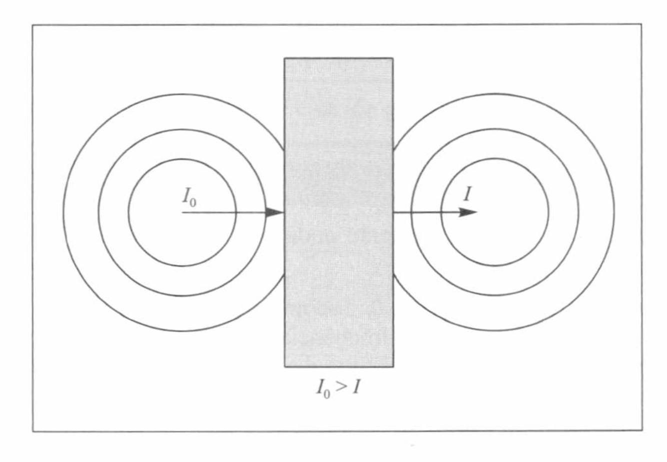
16 *Septiembre 97 - 1,25 puntos*

La intensidad sonora, I, producida por un altavoz de alta fidelidad de los que probablemente tengas en casa, no viene dada por $I = P/(4\pi \cdot r^2)$ siendo P la potencia sonora emitida por el altavoz y r la distancia medida desde el altavoz. Da razones por las que esta relación no se cumple.

$I = P/(4\pi \cdot r^2)$ sólo se cumple si el medio es homogéneo e isótropo (v = cte.) y además si no existe absorción, es decir amortiguamiento de la onda (disminución de su amplitud) debido a pérdidas de energía por rozamiento al atravesar la onda un medio absorbente. En este caso la intensidad de la onda decrece según:

$$I = I_0 \cdot e^{-\beta \cdot \Delta x}$$

siendo β el coeficiente de absorción del medio donde se propaga la onda.



17 *Junio 98 - 3,75 puntos*

Una onda armónica sinusoidal se propaga en el sentido positivo del eje *OX* con una frecuencia de 100 Hz, con una velocidad de 500 m/s y tiene una amplitud de 15 cm. Calcula:

a) La ecuación de onda más general.
b) La separación entre dos puntos cuya diferencia de fase, en un instante, es de $\pi/5$ radianes.

a) Si la onda se propaga en el sentido positivo del eje *OX* su ecuación viene dada por:

$$y\,(x,\,t) = A \text{ sen } (wt - kx + \delta)$$

Considerando $\delta = 0$, vamos a calcular la pulsación w y el número de onda k

$$w = 2\pi f = 2\pi \cdot 100 = 200\pi \text{ rad/s}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{v/f} = \frac{2\pi}{500/100} = \frac{2\pi}{5}\text{ m}^{-1}$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación general obtenemos:

$$\boxed{y = 0{,}15 \text{ sen}\left(200\pi \cdot t - \frac{2\pi}{5} \cdot x\right)}$$

b) Lo vamos a resolver de una forma más original. "Dos puntos consecutivos que están en fase, es decir en las mismas condiciones de movimiento, se encuentran separados una distancia λ m". Aplicando proporciones:

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\Delta x}{\pi/5}$$

Resultando una distancia de:

$$\boxed{\Delta x = 0{,}5 \text{ m}}$$

18 *Junio 98 - 1,25 puntos*

El oído humano normal es capaz de oír sonidos con frecuencias comprendidas entre 20 y 20 000 Hz. ¿Crees que puedes oír sonidos que tengan longitud de onda mayor que el diámetro del orificio de entrada a tu propio oído (alrededor de 1 cm)? Calcula las longitudes de onda correspondientes a los sonidos que podemos escuchar y responde a la pregunta que se te hace. (Dato: velocidad de propagación del sonido en el aire a 15 °C, $v = 340$ m/s).

Calculamos la longitud de onda correspondiente a cada una de las frecuencias indicadas en la cuestión:

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{v}{f_1} = \frac{340}{20} = 17 \text{ m}} \qquad \boxed{\lambda_2 = \frac{v}{f_2} = \frac{340}{20\,000} = 1{,}7 \text{ cm}}$$

Luego podemos oír sonidos cuyas λ estén comprendidas entre 1,7 cm y 17 m y si nuestro oído tiene un diámetro aproximado de 1 cm, la respuesta es que:

Sí podemos oír sonidos cuya longitud de onda sea mayor que el diámetro del orificio de entrada del oído.

19 *Septiembre 98 - 3,25 puntos*

Una onda sinusoidal transversal que se propaga de derecha a izquierda tiene una longitud de onda de 10 m, una amplitud de 2 m y una velocidad de propagación de 400 cm/s. Halla:

a) La ecuación de la onda.
b) La diferencia de fase en un instante dado entre dos puntos separados entre sí 2 m.
c) La diferencia de fase en mismo punto cuando han transcurrido 10 s.

a) Una onda armónica sinusoidal que se propaga en el sentido decreciente del eje *OX*, viene dada por:

$$y = A \text{ sen } (wt + kx)$$

Hallamos los valores de w y K:

$$w = 2\pi f = 2\pi \frac{v}{\lambda} = 2\pi \cdot 0{,}4 = 0{,}8\pi \text{ rad/s}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{10} = 0{,}2\pi \text{ m}^{-1}$$

Como $A = 2$ m, sustituyendo los datos obtenidos en la ecuación general obtenemos la ecuación pedida:

$$\boxed{y = 2 \text{ sen } (0{,}8\pi \cdot t + 0{,}2\pi \cdot x) \text{ S.I.}}$$

b) Para un instante "t" dado las fases correspondientes a 2 puntos que se encuentran en posiciones x_1 y x_2 serán:

$$\phi_1 = wt - kx_1 \; ; \qquad \phi_2 = wt - kx_2$$

$$\Delta\phi = k\,(x_1 - x_2)$$

Sustituyendo valores:

$$\boxed{\Delta\phi = 0{,}2\pi \cdot 2 = 0{,}4\pi \text{ rad}}$$

c) Análogamente para un punto situado en x, las fases correspondientes a dos instantes t_1 y t_2 serán:

$$\phi_1 = wt_1 - kx \; ; \qquad \phi_2 = wt_2 - kx$$

$$\Delta\phi = w\,(t_2 - t_1)$$

Sustituyendo valores:

$$\boxed{\Delta\phi = 0{,}8\pi \cdot 10 = 8\pi \text{ rad}}$$

20 *Septiembre 98 - 1,25 puntos*

Señala cuales de las siguientes opciones son verdaderas y cuales falsas. La energía de un movimiento ondulatorio aumenta al:

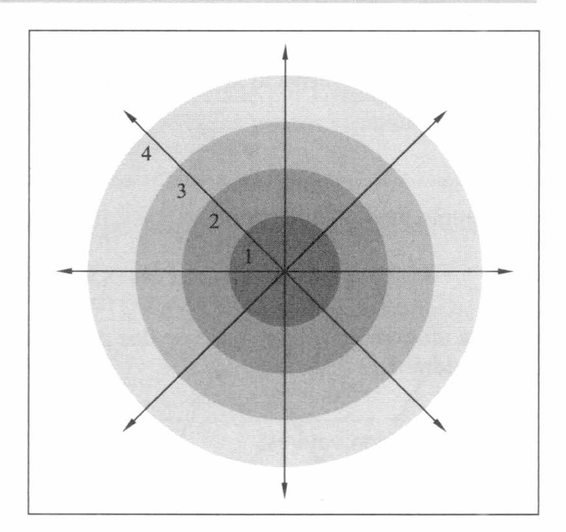
a) Aumentar la amplitud.
b) Disminuir la frecuencia.
c) Aumentar la velocidad de propagación.
d) Aumentar la frecuencia.

La energía asociada al movimiento ondulatorio es función del cuadrado de la frecuencia de la onda y del cuadrado de la amplitud.

$$E = \frac{1}{2} m w^2 A^2 = 2 m \pi^2 f^2 A^2$$

De la expresión anterior podemos contestar a los distintos apartados:

a) Verdadero.
b) Falso.
c) Falso.
d) Verdadero.



21 *Junio 99 - 3,75 puntos*

Un extremo de una cuerda tensa horizontal de 4 m de longitud tiene un movimiento oscilatorio armónico de dirección vertical; en el instante 0,3 s la elongación de ese extremo es 2 cm. Se mide que la perturbación tarda en llegar de un extremo al otro de la cuerda 0,9 s y que la distancia entre dos mínimos consecutivos es 1 m. Calcular:

a) La amplitud del movimiento ondulatorio.
b) La velocidad del punto medio de la cuerda en el instante $t = 1$ s.
c) El desfase entre dos puntos separados 1,5 m, en un instante dado.

a) Como la distancia entre dos mínimos consecutivos es $\lambda = 1$ m, podemos calcular K:

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \text{ m}^{-1}$$

Con los datos del problema, podemos obtener la velocidad de propagación, la frecuencia y la pulsación:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4}{0,9} = 4,45 \text{ m/s}; \qquad f = \frac{v}{\lambda} = 4,45 \text{ Hz}; \qquad w = 2\pi f = 8,9\pi \text{ rad/s}$$

Sustituyendo k y w en la ecuación general de la onda:

$$y\,(x,\,t) = A \text{ sen } (8{,}9\pi \cdot t - 2\pi \cdot x)$$

Si en el extremo donde comienza la perturbación ($x = 0$), en el instante $t = 0{,}3$ s la elongación $y = 2$ cm

$$0{,}02 = A \text{ sen } (8{,}9\pi \cdot 0{,}3 - 2\pi \cdot 0) \;\Rightarrow\; \boxed{A = \frac{0{,}02}{\text{sen}\,(0{,}3 \cdot 8{,}9\pi)} = 0{,}023 \text{ m}}$$

b) La ecuación general de la onda pasará a ser:

$$y = 0{,}023 \text{ sen } (8{,}9\pi \cdot \text{t} - 2\pi \cdot x)$$

Derivando con respecto al tiempo obtenemos la velocidad:

$$v = \frac{dy}{dt} = 0{,}023 \cdot 8{,}9\pi \cos(8{,}9\pi t - 2\pi x)$$

el punto medio de la cuerda es $x = 2$ m, y para $t = 1$ s, su velocidad valdrá:

$$v = 0{,}023 \cdot 8{,}9\pi \cos(8{,}9\pi \cdot 1 - 2\pi \cdot 2) = \boxed{-0{,}611 \text{ m/s}}$$

c) Para un tiempo fijo, las fases de dos puntos determinados cuyas posiciones sean x_1 y x_2 valdrán:

$$\phi_1 = wt - kx_1 \;; \qquad \phi_2 = wt - kx_2 \;; \qquad \Delta\phi = k\,(x_1 - x_2)$$

y sustituyendo valores:

$$\boxed{\Delta\phi = 2\pi \cdot 1{,}5 = 3\pi \text{ rad}}$$

22 *Junio 99 - 1,25 puntos*

El efecto Doppler es un fenómeno ondulatorio que consiste en la dependencia de la frecuencia percibida por un observador respecto a:

a) La intensidad del movimiento ondulatorio.
b) La velocidad de propagación de la onda.
c) El movimiento relativo entre el foco y el observador.
d) La distancia entre el foco y el observador.

El efecto Doppler es un fenómeno ondulatorio que se produce cuando hay un movimiento relativo entre un foco emisor de ondas y un observador. La frecuencia percibida por el observador es distinta de la frecuencia emitida por el foco.

$$f_0 = f_F \, \frac{v \pm v_0}{v \pm v_f}$$

siendo: v = velocidad de propagación de la onda
v_0 = velocidad del observador
v_F = velocidad del foco.

Según lo expuesto "El efecto Doppler es un fenómeno que consiste en la dependencia de la frecuencia percibida por un observador respecto '*a*' ":

a) La intensidad del movimiento ondulatorio → Falso
b) La velocidad de propagación de la onda → Cierto
c) Movimiento relativo entre Foco y Observador → Cierto
d) La distancia entre el foco y el observador → Falso

23

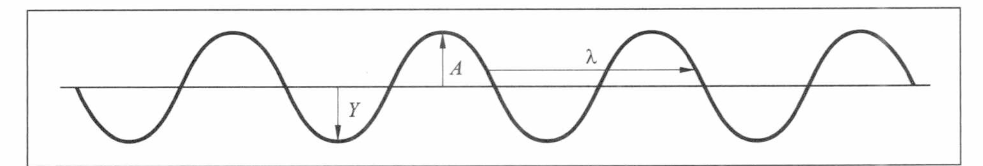
Septiembre 99 - 3,75 puntos

Una onda sinusoidal transversal que se propaga de izquierda a derecha tiene una longitud de onda de 20 m, una amplitud de 4 m y una velocidad de propagación de 200 m/s. Calcula:

a) La ecuación de la onda (supóngase la fase inicial cero).
b) La velocidad transversal máxima de un punto afectado por la vibración.
c) La diferencia de fase, en un instante dado, entre dos puntos separados una distancia de 5 m.

a) La ecuación de una onda sinusoidal que se propaga de izquierda a derecha, suponiendo fase inicial cero viene dada por:

$$y\,(x,\,t) = A \text{ sen } (wt - kx)$$



siendo:

$$w = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot \frac{v}{\lambda} = 2\pi\,\frac{200}{20} = 20\pi \text{ rad/s}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10} = 0{,}1\pi \text{ m}^{-1}$$

Como $A = 4$ m, sustituyendo en la ecuación de la onda resulta:

$$\boxed{y\,(x,t) = 4 \text{ sen } (20\pi \cdot t - 0{,}1\pi \cdot x)}$$

b) Si derivamos y con respecto al tiempo obtenemos la velocidad:

$$v = \frac{dy}{dt} = 4 \cdot 20\pi \cos (20\pi \cdot t - 0{,}1\pi \cdot x)$$

La velocidad máxima se dará para $(20\pi \cdot t - 0{,}1\pi \cdot x) = 1$, y entonces:

$$\boxed{v_{\text{máx}} = 4 \cdot 20\pi = 80\pi \text{ m/s}}$$

c) Para un tiempo fijo, las fases de dos puntos cuyas posiciones son x_1 y x_2 serán:

$$\phi_1 = wt - kx_1\,; \qquad \phi_2 = wt - kx_2\,; \qquad \Delta\phi = k\,(x_1 - x_2)$$

y sustituyendo valores y datos:

$$\Delta\phi = 0{,}1\pi \cdot 5 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

24 *Septiembre 99 - 1,25 puntos*

Un instrumento musical emite un sonido de 70 dB. ¿Cuántos instrumentos deben sonar juntos para producir una sonoridad de 90 dB? ($\log a \pm \log b = \log (a/b)$).

No existe proporcionalidad entre la intensidad de un sonido I y la sensación sonora que produce β La sonoridad expresada en decibelios dB, viene dada por la expresión:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

siendo $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 la intensidad umbral de audición para el oído humano.

Vamos a averiguar cual es la intensidad correspondiente a 70 dB y 90 dB:

$$70 = 10 \log \frac{I_1}{10^{-12}}; \qquad 90 = 10 \log \frac{I_2}{10^{-12}}$$

Aplicando propiedades de logaritmos a las dos ecuaciones:

$$7 = \log I_1 - \log 10^{-12} \Rightarrow 7 = \log I_1 + 12 \Rightarrow I_1 = 10^{-5} \text{ W/m}^2$$

$$9 = \log I_2 - \log 10^{-12} \Rightarrow 9 = \log I_2 + 12 \Rightarrow I_2 = 10^{-3} \text{ W/m}^2$$

Comparando las dos intensidades, el número de instrumentos utilizados es de:

$$n = \frac{I_2}{I_1} = 100 \text{ instrumentos}$$

25 *Junio 2000 - 3,75 puntos*

Una onda transversal se propaga por una cuerda según la ecuación $y = 0{,}4$ sen $\pi \cdot$ $\cdot (50t - 0{,}5x)$, en unidades del S.I. Calcula:

a) La frecuencia, la longitud de onda y velocidad de propagación de la onda.
b) La velocidad transversal de una partícula situada a 20 m del foco en el instante $t = 0{,}5$ seg.
c) La diferencia de fase, en un instante dado, entre dos puntos separados una distancia de 2 m.

a) Si comparamos la ecuación de la onda transversal dada en el enunciado del problema con la correspondiente a la ecuación general podemos deducir los parámetros solicitados.

$$y = A \text{ sen } (wt - kx)$$

Fácilmente se deduce que:

$$w = 50\pi = 2\pi f \Rightarrow \boxed{f = 25 \text{ Hz}}$$

$$k = 0{,}5\pi = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \boxed{\lambda = 4 \text{ m}}$$

$$\boxed{v = \lambda \cdot f = 4 \cdot 25 = 100 \text{ m/s}}$$

b) La velocidad transversal de una partícula la podemos obtener derivando la ecuación de onda con respecto al tiempo.

$$v = \frac{dy}{dt} = 0{,}4 \cdot 50\pi \cos \pi\,(50t - 0{,}5x) = 20\pi \cos \pi\,(50t - 0{,}5x)$$

Sustituyendo x y t por los datos del problema:

$$\boxed{v = 20\pi \cos \pi\,(50 \cdot 0{,}5 - 0{,}5 \cdot 20) = -\,20\pi \text{ m/s}}$$

c) Para un instante $t =$ fijo, las fases de 2 puntos separados del foco emisor unas distancias x_1 y $\mathbf{x}_2$, valen:

$$\phi_1 = wt - kx_1\ ; \qquad \phi_2 = wt - kx_2\ ; \qquad \Delta\phi = k\,(x_1 - x_2)$$

Sustituyendo valores:

$$\boxed{\Delta\phi = 0{,}5\pi \cdot 2 = \pi \text{ rad}}$$

26 *Junio 2000 - 1,25 puntos*

La frecuencia de una nota musical es 440 Hz. Hallar la longitud de onda del sonido correspondiente cuando se propaga en el aire (v = 340 m/s) y cuando lo hace en el agua (v = 144 m/s).

Sabemos que la relación entre las magnitudes longitud de onda, frecuencia y velocidad de propagación es la siguiente:

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

Sustituyendo datos:

$$\boxed{\lambda_{aire} = \frac{340}{440} = 0{,}773 \text{ m}}$$

$$\boxed{\lambda_{agua} = \frac{144}{140} = 0{,}327 \text{ m}}$$

27 *Septiembre 2000 - 3,75 puntos*

Una onda armónica se propaga por un medio elástico según la ecuación $y =$ $= 2 \text{ sen } (4\pi t - \pi x)$ donde x está medida en metros y t en s. Hallar:

a) La frecuencia, longitud de onda y la velocidad de propagación de la onda.
b) La velocidad transversal de una partícula situada a 1 m del foco en $t = 0{,}5$ s.
c) Calcula la elongación de un punto que se encuentra en $x = 0$ para un tiempo t.

a) La ecuación de una onda armónica sinusoidal viene dada por $y = A$ sen $(wt - kx)$, siendo A la amplitud, w la pulsación o frecuencia angular y k el número de onda:

$$A = 2\,m; \qquad w = 4\pi \Rightarrow 2\pi\nu = 4\pi \Rightarrow \boxed{\nu = 2\text{ Hz}}$$

$$K = \pi = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \boxed{\lambda = 2\text{ m}}$$

$$\boxed{v = \lambda \cdot \nu = 2 \cdot 2 = 4\text{ m/s}}$$

b) La velocidad transversal de una partícula se obtiene derivando la elongación:

$$v = \frac{dy}{dt} = 8\pi \cos(4\pi t - \pi x)$$

Sustituyendo para $x = 1$ m y $t = 0{,}5$ s.

$$\boxed{v = 8\pi \cos(4\pi \cdot 0{,}5 - \pi \cdot 1) = -8\pi\text{ m/s}}$$

c) La elongación para un punto situado en el foco en el instante 0,5 segundos viene será:

$$\boxed{y = 2\text{ sen}(4\pi \cdot 0{,}5 - \pi \cdot 0) = 2 \cdot 0 = 0\text{ m}}$$

28 *Septiembre 2000 - 1,25 puntos*

¿Cuál es la longitud de la onda asociada a un electrón ($m = 9 \cdot 10^{-31}$ kg) que se mueve con una velocidad de $2 \cdot 10^4$ m/s? $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J · s.

La onda asociada a una partícula de masa "m" que se mueve con velocidad "v" es $\lambda = h/mv$, según la hipótesis de De Broglie. Por tanto:

$$\boxed{\lambda = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{9 \cdot 10^{-31} \cdot 2 \cdot 10^{4}} = 3{,}64 \cdot 10^{-8} = 36{,}4\text{ nm}}$$

29 *Septiembre 2000 - 1,25 puntos*

Expresa como varía la intensidad y la amplitud de una onda esférica con la distancia al foco emisor (se supone que no hay absorción).

Para ondas esféricas:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{A_1^2}{A_2^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

a) La intensidad de la onda es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco emisor que se considere.
b) La intensidad es directamente proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda.
c) La amplitud de una onda esférica disminuye proporcionalmente a la distancia.

TEMA 2

ÓPTICA

RESUMEN TEÓRICO DEL TEMA

1. Naturaleza de la luz

La luz es una forma radiante de la energía que impresiona nuestro sentido de la vista, permitiéndonos ver·los cuerpos que nos rodean.

Los cuerpos que emiten luz se llaman cuerpos **luminosos**.

Newton justifica su teoría **corpuscular** de la luz diciendo que consistía en un chorro de partículas emitidas por la fuente luminosa. Los demás cuerpos se ven debido a que reflejan algunos de los corpúsculos que los golpean. Al llegar las partículas emitidas y reflejada al ojo, producen la sensación de ver.

Huygens defiende la teoría **ondulatoria** de la luz, afirmaba que, al igual que el sonido, la luz es un movimiento ondulatorio. Así como las ondas sonoras se propagan en el aire, las ondas luminosas necesitan también de un medio, extremadamente sutil y de perfecta elasticidad, que las permita propagarse y que llene el vacío, el éter. Su teoría permitía explicar fenómenos conocidos como la reflexión, refracción, interferencias, etc.

Luis de Broglie, hacia 1922, propuso una nueva teoría afirmando que la luz tiene una doble naturaleza, algunas veces se comporta como onda, y en otros casos como partícula.

2. La propagación de la luz, índice de refracción

Óptica es la parte de la física que se ocupa del estudio de la luz.

Óptica geométrica estudia los fenómenos que pueden ser deducidos sin necesidad de hacer hipótesis acerca de la naturaleza de la luz.

Cuando un cuerpo no permite pasar la luz a su través, se dice que es **opaco**.

Cuando un cuerpo deja pasar la luz, y además permite ver los cuerpos a su través se dice que es **transparente** (si no se ven nítidos = **translúcidos**).

Haz de luz es el conjuntos de radiaciones luminosas transmitidas en el interior de un cono que tiene como vértice el foco luminoso y está limitado por la abertura efectuada en la pantalla.

Rayo luminoso es cada una de las direcciones de propagación de la luz.

La velocidad de la luz en el vacío es aproximadamente de 300 000 km/s, siendo en los medios materiales menor, dependiendo su valor del medio de propagación.

Índice de refracción absoluto de una sustancia es el cociente entre la velocidad de propagación de las ondas luminosas en el vacío y la velocidad de propagación en dicho medio.

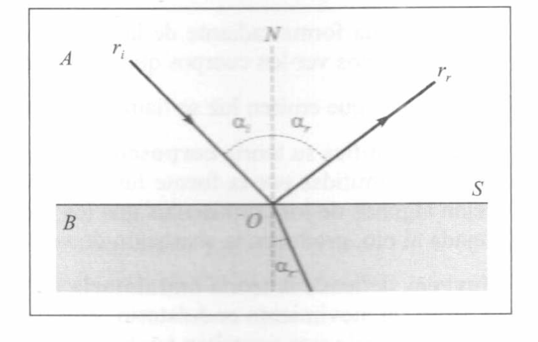
$$n = \frac{c}{v}$$

Índice de refracción relativo de una sustancia con respecto a otra $n_{2,1}$, al cociente entre los respectivos índices de refracción absolutos.

$$n_{2,1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c/v_2}{c/v_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

3. Reflexión y refracción de la luz

Cuando un rayo luminoso llega a la superficie de separación de distinto índice de refracción, origina dos rayos, uno propagándose en el mismo medio *R* y otro que lo hace en segundo medio *R'*.



Aparecen los dos fenómenos característicos de las ondas, la **reflexión** y la **refracción**.

Rayo incidente. El que llega al punto *O* de la superficie de separación de dos medios de distinto índice de refracción.

Rayo reflejado. El que sigue propagándose en el mismo medio tras desviarse el rayo incidente.

Ángulo de incidencia. Al formado por el rayo incidente con la normal (α_i).

Ángulo de reflexión. Al formado pro el rayo reflejado y la normal (α_r).

Leyes de la reflexión:

a) El rayo incidente, el rayo reflejado y la normal están en un mismo plano.
b) El ángulo de incidencia (α_i) es igual al ángulo de reflexión (α_r).

$$\alpha_i = \alpha_r$$

Rayo refractado. Es el que se propaga en el segundo medio.

Ángulo de refracción. El formado por el rayo reflejado y la normal ($\alpha_{r'}$).

Leyes de la refracción:

a) El rayo incidente, la normal y el rayo refractado están en un mismo plano.
b) Cuando la luz pasa de un medio de índice de refracción n_1 a otro medio de índice de refracción n_2 los ángulo de incidencia α_i y de refracción $\alpha_{r'}$, cumplen:

$$n_1 \cdot \text{sen}\ \alpha_i = n_2 \cdot \text{sen}\ \alpha_{r'} \qquad \textbf{Ley de Snell}$$

4. Ángulo límite, reflexión total

Ángulo límite α_L es el ángulo de incidencia al que corresponde un ángulo de refracción de 90º. Si el ángulo de incidencia aumenta ya no se refractan los rayos, sino que se reflejan por completo produciéndose **la reflexión total**.

Este fenómeno solamente se produce al pasar la luz de un medio más refringente a otro que lo es menos. Es decir $n_1 > n_2$ (la onda pasa de un medio a otro que se propaga a más velocidad).

Sustituyendo en la ley de Snell obtenemos:

$$n_1 \cdot \text{sen}\ \alpha_L = n_2$$

Que nos permite calcular el ángulo límite entre distintos materiales.

5. Espejos planos

Llamamos **sistema óptico** a un conjunto de superficies que separan medios de distintos índices de refracción. El caso más sencillo es sistema óptico formado por una sola superficie de separación.

Si tenemos un punto *O* ante un sistema óptico y ocurre que los rayos luminosos que parten de *O* se reúnen en un punto *O'* tras reflejarse o refractarse en el sistema, decimos que *O'* es **la imagen real** del punto objeto *O*.

Puede ocurrir que los rayos luminosos que parten de *O* no se reúnan en un punto tras reflejarse o refractarse en el sistema. Pero que sus prolongaciones en sentido contrario al de propagación de la luz se corten en punto *O'*. Al punto *O'* se le llama **imagen virtual** del punto objeto *O'*.

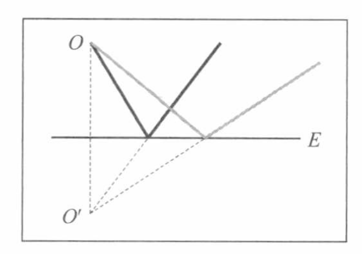
Llamamos espejo plano a una superficie plana y pulimentada de gran poder de reflexión, capaz de reflejar en una sola dirección a un haz de rayos paralelos.

Los espejos comerciales están fabricados por una lámina de vidrio, en cuya parte posterior se ha depositado una fina película de plata (que tiene un elevado poder de reflexión) que suele ir pintada, por la parte posterior con el objeto de protegerla.

La imagen de un objeto extenso se obtiene por reunión de los puntos imagen correspondientes a todos y cada uno de los puntos objeto.

Un objeto plano frente al que se sitúa un objeto, proporciona una imagen virtual que es simétrica respecto al plano del espejo y de igual tamaño.

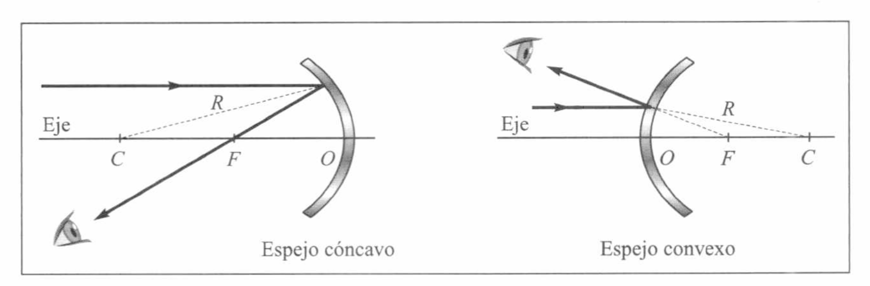
Comprobación:



6. Espejos curvos

Los tipos más frecuentes de espejos de superficie no planos son los espejos parabólicos y los espejos esféricos. En el caso de estar pulimentados interiormente son **cóncavos** y si lo están por el exterior **convexos**.

Los espejos esféricos son casquetes esféricos pulimentados. En ellos podemos distinguir los siguientes elementos:



Radio de curvatura. *R*. Es el radio de la esfera a la que pertenece el espejo.

Centro de curvatura. *C*. Es el centro de la superficie esférica

Centro del espejo. *O*. Es el centro de su superficie

Eje principal o eje óptico. Es la recta que pasa por su centro *O* y su centro de curvatura *C*.

Eje secundario. Es cualquier recta que pasa por *C*.

Foco. *F*. Es el punto medio entre el centro de curvatura *C* y el centro *O*.

Distancia focal. *f*. Es la distancia entre el centro *O* y el foco *F*.

$$f = \frac{R}{2}$$

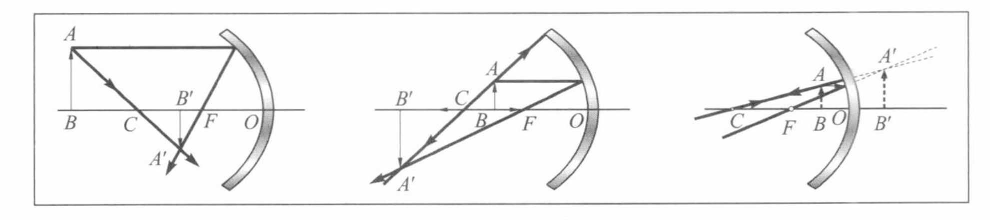
Para construir imágenes en los espejos esféricos se seleccionan algunos rayos cuya trayectoria sea conocida.

Estos son tres:

1º. Todo rayo que viene paralelo al eje se refleja de forma que él o su prolongación pasa por el por el foco *F*.
2º. Todo rayo luminoso que sigue la dirección del eje principal o de un eje secundario se refleja en la misma dirección.
3º. El rayo que se dirige hacia el foco, se refleja paralelo al eje.

6.1. Imágenes formadas por los espejos cóncavos

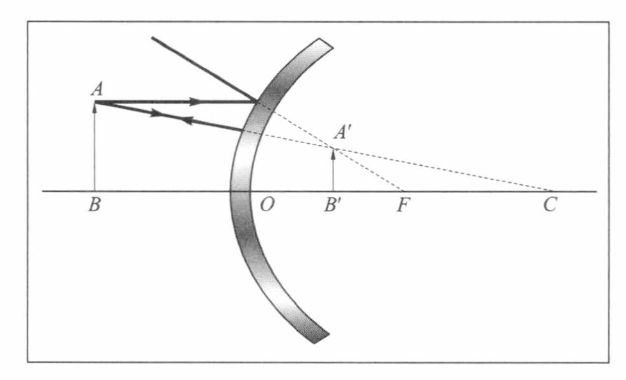
Para formar la imagen de un punto nos bastará trazar dos rayos cualesquiera de los anteriores.



a) **Si el objeto está lejano**, la imagen es real, menor que el objeto, invertida y situada entre *C* y *F*.
b) **Si el objeto está en** *C*, la imagen es real, igual que el objeto, invertida y situada en *C*.
c) **Si el objeto se encuentra entre** *C* **y** *F*, la imagen es real, de mayor tamaño, invertida y situada entre *C* y $-\infty$.
d) **Si el objeto está entre** *F* **y** *O*, la imagen es virtual, mayor que el objeto, derecha y situada entre *O* y $+\infty$.

6.2. Imágenes formadas por los espejos convexos

En cualquier posición del objeto, un espejo esférico convexo produce una imagen virtual, derecha y de menor tamaño que el objeto y situadas entre el foco y el espejo.



Los espejos esféricos se usan en algunos instrumentos ópticos y en algunos reflectores.

Los espejos parabólicos se utilizan en reflectores, proyectores, faros, etc.

7. Lentes. Tipos de lentes

Llamamos **lentes** a porciones de material transparente limitadas por dos superficies, una de las cuales, al menos, debe ser curva.

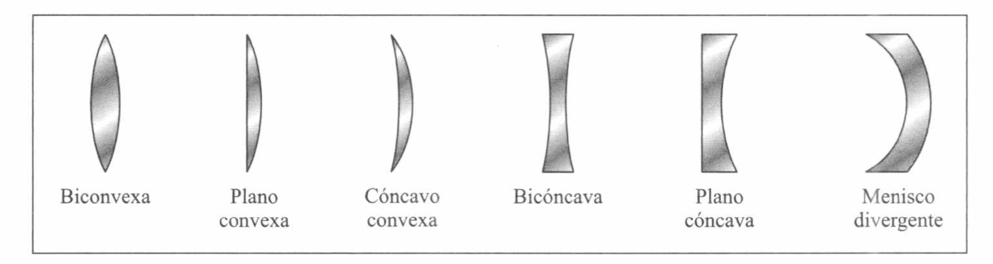
Las lentes de vidrio son las más comunes. En ellas, las superficies curvas suelen ser esféricas. La recta que une los centros de curvatura de las caras de la lente se llama eje óptico de la lente. A la distancia entre las caras medidas sobre el eje óptico se llama espesor de la lente.

Las lentes se pueden clasificar:

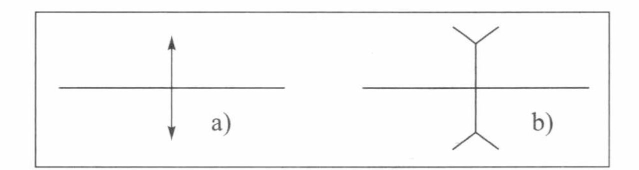
1º Atendiendo a los radios de las caras en:
Delgadas. Si los radios de las caras de la lente son grandes en comparación con el espesor de la lente.
Gruesas. El caso contrario al anterior.

2º Atendiendo a su acción sobre la luz:
Lentes convergentes. Son siempre más gruesas por el centro que por los extremos y actúan de modo que tienden a reunir los rayos de un haz de rayos paralelos que lleguen a la lente.
Lentes divergentes. Son siempre más delgadas por el centro que por los extremos y actúan de modo que tienden a separar los rayos de un haz de rayos paralelos que lle-

guen a la lente. Como consecuencia, las prolongaciones de los rayos emergentes de la lente en sentido contrario al de propagación de la luz tienden a reunirse.



Las lentes convergentes atendiendo a su forma, podemos clasificarlas en biconvexas, plano-convexa y cóncavo-convexa. Su representación genérica es (figura a):



Las lentes divergentes atendiendo a su forma, podemos clasificarlas en bicóncava, plano-cóncava y convexo-cóncava. Su representación genérica es (figura b).

7.1. Imágenes en las lentes

Los rayos al atravesar las lentes siguen las leyes de la refracción de la luz. Sin embargo, veremos a continuación, unas reglas que nos permiten simplificar el problema de trazado de imágenes.

a) Al centro geométrico de la lente se le llama centro óptico. Cualquier rayo que pasa por el centro óptico, atraviesa la lente sin desviarse.
b) Todo rayo que llega a la lente paralelamente al eje óptico sale (él o su prolongación) pasando por un punto especial del eje óptico llamado foco imagen de la lente (F')
c) Todo rayo que sale de la lente, paralelamente al eje óptico de la lente, llega a ella de tal modo que el rayo o su prolongación pasa por un punto especial del eje llamado foco objeto de lente (F).

Los focos de las lentes delgadas equidistan del centro óptico de la lente y podemos definirla como sigue:

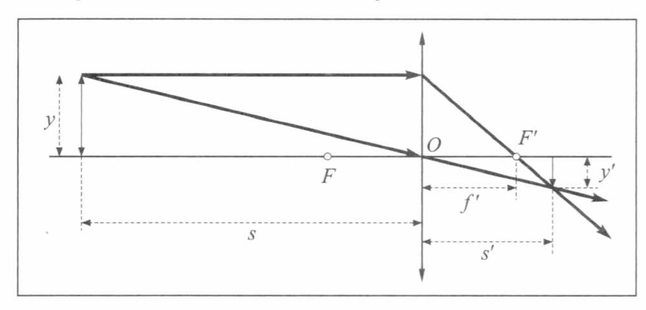
Foco objeto de una lente es un punto del eje óptico cuya imagen se forma en el infinito y sobre el eje.

Foco imagen de una lente es un punto del eje óptico que es imagen de un punto que se encuentra en el infinito y sobre el eje.

Para encontrar gráficamente la imagen de un punto que no se encuentre en el eje, dibujaremos dos de los rayos antes señalados en a), b), y c).

Para mayor sencillez veremos como se construyen gráficamente las imágenes de objetos situados sobre el eje de una lente convergente.

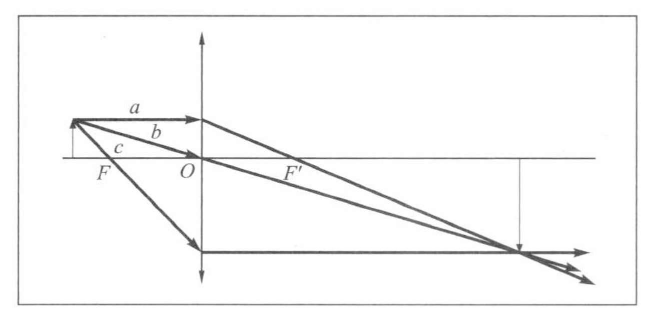
1º **El objeto está situado entre** $-\infty$ **y** $-2F$.



La imagen es invertida, real, menor que el objeto y está situada entre F' y $2F'$.

2ª **El objeto está situado en** $-2F$.
La imagen es invertida, real, del mismo tamaño que el objeto y está situada en $2F'$.

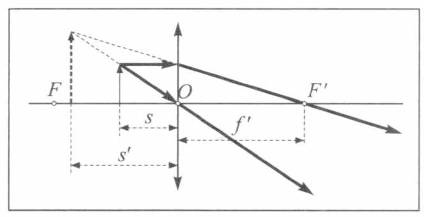
3º **El objeto está situado entre** $-2F$ **y** F.



La imagen es invertida, mayor que el objeto y está situada entre $2F'$ y ∞.

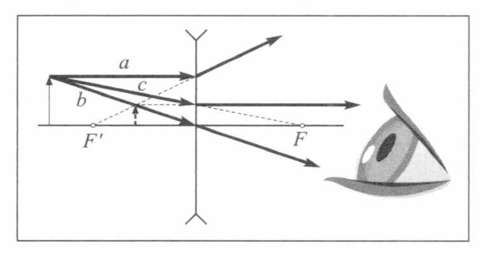
4º **El objeto está situado en** $-F$.
La imagen e forma en el infinito.

5º **El objeto está situado entre** $-F$ **y la lente**.



La imagen es derecha, virtual, mayor que el objeto y está situada entre $-\infty$ y la lente.

6º **Imágenes en lentes divergentes**.



Para cualquier posición del objeto, la imagen es derecha, virtual, menor que el objeto y situada entre el foco F' y la lente.

CUESTIONES Y EJERCICIOS DE ÓPTICA

1. Demostrar gráficamente cómo es la imagen que se forma en un espejo cóncavo cuando el objeto se coloca entre el foco y el espejo.

2. Define la ley de Snell de la refracción y calcula la velocidad de la luz en un medio de índice de refracción absoluto 0,3. (Solución: 10^9 m/s)

3. Explica brevemente qué diferencia hay entre una lente convergente y una divergente. ¿Cómo se llama la unidad que mide la potencia de una lente?

4. Explica brevemente la ley de Snell para la refracción de la luz y calcula cuál debe ser el ángulo de incidencia de un rayo luminoso sobre una superficie de índice de refracción absoluto 5/3 para que el ángulo de refracción sea de 30°. (Solución: 56,4°)

5. Calcula el valor del ángulo crítico para que se produzca la reflexión total de la luz cuando procedente de un vidrio, que tiene un índice de refracción de 1,52, penetra en el aire. (Solución: 41,1°)

6. ¿Calcula la distancia focal de una que tiene una potencia de 0,75 dioptrías? (Solución: 1,3 m)

7. Supongamos que coges una cuchara de plata (para que actúe como un espejo) y te miras en ella. Describe lo que ocurre, si te miras en las dos caras de la cuchara, es decir, si le das la vuelta a la cuchara.

8. Supongamos que deseas hacerte una foto a ti mismo y para ello te colocas con la cámara de fotografía delante de un espejo, a 8 m de él. ¿A qué distancia debes enfocar la cámara para que la fotografía salga nítida? (Solución: 16 m)

9. Un rayo de luz pasa de agua a 20 °C ($n = 1,333$) a un diamante ($n = 2,917$) con un ángulo de incidencia de 60 °C. Calcula el ángulo de refracción. (Solución: 23,3°)

10. Con una misma lente podemos ver un mismo objeto de diferentes tamaños. ¿Qué tenemos que hacer para lograrlo?

11. Un espejo cóncavo sólo produce imágenes virtuales cuando el objeto se coloca entre el foco y el espejo, sin embargo, los espejos planos siempre producen imágenes virtuales,

a) ¿Es cierta la afirmación anterior?
b) ¿Existe alguna relación entre ambos casos?

12. Un foco luminoso puntual se encuentra situado en el fondo de un estanque lleno de agua de $n = 4/3$ y a 1 m de profundidad. Emite luz en todas las direcciones. En la superficie del agua se forma un círculo luminoso de radio R. Explica brevemente este fenómeno y calcula el radio R del círculo luminoso. (Solución: 1,13 m)

13. Un rayo de luz se propaga en el aire e incide en una cubeta llena de agua, formando un ángulo de 45° con la superficie de separación del agua. Calcula:

a) La dirección que tendrá el rayo luminoso al propagarse dentro del agua, sabiendo que el índice de refracción del agua es 1,33 y se toma como índice de refracción para el aire 1. (Solución: 32,1°)
b) La velocidad de propagación de la luz en el agua. ($c = 300\,000$ km/s). (Solución: 225 564 km/s)

14. Explica brevemente cuál es la diferencia fundamental entre la hipótesis de Newton y la de Huygens sobre la naturaleza de la luz.

15. Un rayo de luz atraviesa una lámina de vidrio plano de espesor 4 cm incidiendo con un ángulo de 30°. Por efecto de la refracción, al salir se ha desplazado una distancia D paralelamente a sí mismo. Sabiendo $n_{(vidrio)} = 1,35$, $n_{(aire)} = 1$. ¿Cuál es la distancia desplazada? (Solución: 0,62 cm)

16. Un rayo luminoso incide desde el agua sobre la superficie de separación con el aire. Calcula:

a) El ángulo de refracción si el de incidencia es de 25°. (Solución: 34,2°)

b) El ángulo límite. (Solución: 48,8°)

(Datos: $n_{(agua)} = 1,33$; $n_{(aire)} = 1$)

17. Obtén gráficamente la imagen de un objeto que está situado a una distancia de una lente delgada convergente mayor que el doble de la distancia focal.

18. Construye la imagen producida por un espejo convexo e indica cómo es esa imagen.

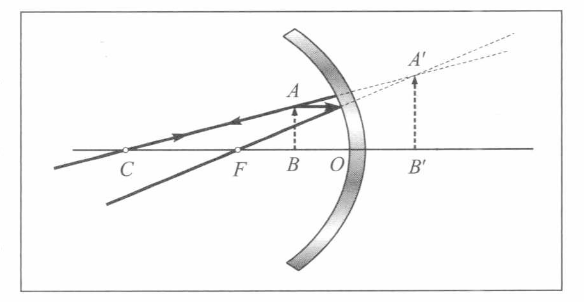
19. ¿Cómo son las imágenes de las lentes divergentes? Justifica gráficamente la respuesta.

CUESTIONES Y EJERCICIOS RESUELTOS DE ÓPTICA

1 *Junio 96 - 1,25 puntos*

Demostrar gráficamente cómo es la imagen que se forma en un espejo cóncavo cuando el objeto se coloca entre el foco y el espejo.

Como los rayos reflejados en el espejo divergen, son sus prolongaciones los que se interceptan por detrás de él, por tanto se trata de una imagen virtual y además según se aprecia en la figura anterior de mayor tamaño y derecha.



Si el objeto está entre F y O, la imagen es virtual, mayor que el objeto, derecha y situada entre O y +∞.

2 *Junio 96 - 1,25 puntos*

Define la ley de Snell de la refracción y calcula la velocidad de la luz en un medio de índice de refracción absoluto 0,3.

Cuando un rayo de luz pasa de un medio a otro de distinto índice de refracción, se cumple que la relación entre el seno del ángulo de incidencia y el de refracción es constante y a su vez igual a la relación del índice de refracción del segundo medio respecto del primero.

$$\frac{\text{sen}\,\hat{i}}{\text{sen}\,\hat{r}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{2,1}$$

Se define **índice de refracción absoluto** como "el índice de refracción de una sustancia considerada respecto al vacío". Así pues:

$$n = \frac{c}{v}$$

en donde: c = velocidad de la luz en el vacío y
v = velocidad de la luz en el medio.

Despejando y sustituyendo

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{0,3} = \boxed{10^9 \text{ m/s}}$$

(Este resultado contradice la teoría de la relatividad de Einstein de la que se deduce que la máxima velocidad que puede adquirir la luz es cuando se mueve en el vacío y que es exactamente 299 792,458 km/s, aunque nosotros hemos utilizado para los cálculos $c = 3 \cdot 10^8$ m/s).

3 *Septiembre 96 - 1,25 puntos*

Explica brevemente qué diferencia hay entre una lente convergente y una divergente. ¿Cómo se llama la unidad que mide la potencia de una lente?

Lentes convergentes. Son siempre más gruesas por el centro que por los extremos y actúan de modo que tienden a reunir los rayos de un haz de rayos paralelos que lleguen a la lente.

Lentes divergentes. Son siempre más delgadas por el centro que por los extremos y actúan de modo que tienden a separar los rayos de un haz de rayos paralelos que lleguen a la lente. Como consecuencia, las prolongaciones de los rayos emergentes de la lente en sentido contrario al de propagación de la luz tienden a reunirse.

La potencia de una lente es la inversa de su distancia focal y cuando ésta viene en metros la potencia viene en dioptrías. Por tanto *una dioptría es una unidad de convergencia o divergencia de un sistema óptico, que indica la recíproca de su distancia focal expresada en metros*. (1 D = 1 m^{-1}).

4 *Septiembre 96 - 1,25 puntos*

Explica brevemente la ley de Snell para la refracción de la luz y calcula cuál debe ser el ángulo de incidencia de un rayo luminoso sobre una superficie de índice de refracción absoluto 5/3 para que el ángulo de refracción sea de 30º.

Cuando un rayo luminoso llega a la superficie de separación de distinto índice de refracción, origina dos rayos, uno propagándose en el mismo medio R y otro que lo hace en segundo medio, R'.

Aparecen los dos fenómenos característicos de las ondas, la reflexión y la **refracción**.

Leyes de la refracción:

c) El rayo incidente, la normal y el rayo refractado están en un mismo plano.
d) *Cuando la luz pasa de un medio de índice de refracción n_1 a otro medio de índice de refracción n_2 los ángulo de incidencia α_i y de refracción $\alpha_{r'}$, cumplen:*

$n_1 \cdot \text{sen}\ \alpha_i = n_2 \cdot \text{sen}\ \alpha_{r'}$ **Ley de Snell**

N, A, r_i, r_r, α_i, α_r, S, B, O, $\alpha_{r'}$

Suponemos que el medio de donde proviene el rayo luminoso es el aire, sustituyendo datos y despejando:

$$\text{sen}\ \alpha_i = \text{sen}\ 30 \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{6}$$

Por tanto,

$$\alpha_i = \text{arcsen}\ \frac{5}{6} = \boxed{56{,}4^\circ}$$

5 *Junio 97 - 1,25 puntos*

Calcula el valor del ángulo crítico para que se produzca la reflexión total de la luz cuando procedente de un vidrio, que tiene un índice de refracción de 1,52, penetra en el aire.

Ángulo límite α_L es el ángulo de incidencia al que corresponde un ángulo de refracción de 90°. Si el ángulo de incidencia aumenta ya no se refractan los rayos, sino que se reflejan por completo produciéndose **la reflexión total**.

Este fenómeno solamente se produce al pasar la luz de un medio más refringente a otro que lo es menos. Es decir $n_1 > n_2$ (la onda pasa de un medio a otro que se propaga a más velocidad).

Sustituyendo en la ley de Snell obtenemos:

$$n_1 \cdot \text{sen}\ \alpha_L = n_2$$

Que nos permite calcular el ángulo límite entre distintos materiales.

Para el caso particular de que el 2° medio sea el aire:

$$\text{sen}\ \alpha_L = \frac{1}{1{,}52}$$

Siendo el ángulo crítico igual a:

$$\alpha_L = \boxed{41{,}1^\circ}$$

6 *Junio 97 - 1,25 puntos*

¿Calcula la distancia focal de una lente que tiene una potencia de 0,75 dioptrías?

Como la potencia de una lente (en dioptrías) se define como la inversa de su distancia focal en metros.

$$f = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}75} = \boxed{1{,}3 \text{ m}}$$

7 *Septiembre 97 - 1,25 puntos*

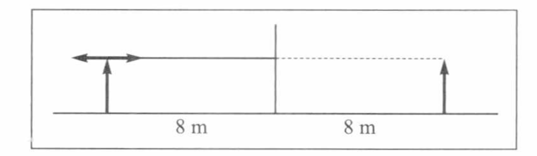
Supongamos que coges una cuchara de plata (para que actúe como un espejo) y te miras en ella. Describe lo que ocurre, si te miras en las dos caras de la cuchara, es decir, si le das la vuelta a la cuchara.

Cuando uno se mira **por el anverso** (cara cóncava) *la imagen es invertida y parece aún más alejada,* lo que se corresponde con la imagen *formada en un espejo cóncavo cuando el objeto se encuentra en el centro de curvatura (entre –∞ y C).*

Cuando uno se mira **por el reverso** de dicha cuchara *la imagen es derecha y también de menor tamaño* que el objeto como corresponde a *la imagen formada en un espejo convexo.*

8 *Junio 98 - 1,25 puntos*

Supongamos que deseas hacerte una foto a ti mismo y para ello te colocas con la cámara de fotografía delante de un espejo, a 8 m de él. ¿A qué distancia debes enfocar la cámara para que la fotografía salga nítida?



Aunque el enunciado no lo dice parece que se trata de un espejo plano que forma una imagen del objeto siempre virtual y simétrica.

Atendiendo a esta 2ª condición la cámara deberá ser enfocada a una distancia total de (8 + 8) m.

$$d = \boxed{16 \text{ m}}$$

9 *Junio 98 - 1,25 puntos*

Un rayo de luz pasa de agua a 20 ºC ($n = 1{,}333$) a un diamante ($n = 2{,}917$) con un ángulo de incidencia de 60 ºC. Calcula el ángulo de refracción.

Cuando una onda se propaga de un medio de índice de refracción n_1 a otro de índice de refracción mayor n_2. Se cumple la ley de Snell:

$$\frac{\text{sen}\,\hat{i}}{\text{sen}\,\hat{r}} = \frac{n_2}{n_1}$$

Despejando y sustituyendo:

$$\text{sen}\,\hat{r} = \text{sen}\,60\,\frac{1{,}333}{2{,}917} = 0{,}396$$

$$\hat{r} = \text{arcsen}\,0{,}396 = \boxed{23{,}3^\circ}$$

10 *Septiembre 98 - 1,25 puntos*

Con una misma lente podemos ver un mismo objeto de diferentes tamaños. ¿Qué tenemos que hacer para lograrlo?

Para ver con una lente un mismo objeto con distintos tamaños, tendremos que *variar la distancia que hay desde el objeto al centro óptico de la lente.*

Así en lentes divergentes que producen una imagen virtual y derecha del objeto y siempre de menor tamaño que aquel, a medida que la aproximamos a la lente su imagen va aumentando de tamaño.

En el caso de lentes convergentes si la distancia "p" a la lente es:

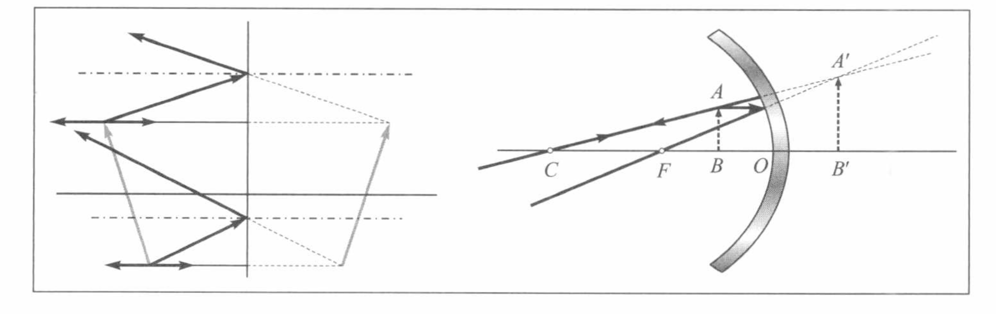
$p \succ 2f$	la imagen es de menor tamaño real e invertida
$p = 2f$	la imagen es de igual tamaño real e invertida
$2f \succ p \succ f$	la imagen es de mayor tamaño real e invertida
$p = f$	no hay imagen
$p \prec f$	la imagen es de mayor tamaño virtual y derecha.

11 *Septiembre 98 - 1,25 puntos*

Un espejo cóncavo sólo produce imágenes virtuales cuando el objeto se coloca entre el foco y el espejo, sin embargo, los espejos planos siempre producen imágenes virtuales,

a) ¿Es cierta la afirmación anterior?
b) ¿Existe alguna relación entre ambos casos?

a) *Sí es cierto que ambas imágenes son virtuales*:



b) *Similitud: ambas imágenes son derechas.*

Diferencias:

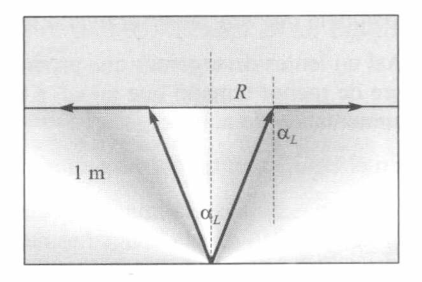
1) En el espejo plano la imagen es simétrica respecto del objeto, sin embargo, en el caso del espejo cóncavo no es así.
2) En el espejo plano la imagen tiene el mismo tamaño que el objeto, y en el caso del espejo cóncavo, cuando el objeto está entre el foco y el objeto, la imagen es de mayor tamaño que el objeto.

12

Junio 99 - 1,25 puntos

Un foco luminoso puntual se encuentra situado en el fondo de un estanque lleno de agua de $n = 4/3$ y a 1 m de profundidad. Emite luz en todas las direcciones. En la superficie del agua se forma un círculo luminoso de radio R. Explica brevemente este fenómeno y calcula el radio R del círculo luminoso.

Ángulo límite es el ángulo de incidencia al que corresponde un ángulo de refracción de 90º. Si el ángulo de incidencia aumenta ya no se refractan los rayos, sino que se reflejan por completo produciéndose la reflexión total.



Este fenómeno solamente se produce al pasar la luz de un medio más refringente a otro que lo es menos. Es decir $n_1 > n_2$ (la onda pasa de un medio a otro que se propaga a más velocidad).

Sustituyendo en la ley de Snell obtenemos:

$$n_1 \cdot \text{sen}\, \alpha_L = n_2$$

expresión que nos permite calcular el ángulo límite:

$$\text{sen}\, \alpha_L = \frac{1}{4/3} = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha_L = 48{,}59^\circ$$

Para triángulos rectángulos, sabemos por trigonometría que la tangente de un ángulo es igual a su cateto opuesto dividido por el contiguo, obteniendo un valor para R de:

$$R = 1 \cdot \text{tg}\, 48{,}59 = \boxed{1{,}13 \text{ m}}$$

13

Junio 99 - 1,25 puntos

Un rayo de luz se propaga en el aire e incide en una cubeta llena de agua, formando un ángulo de 45º con la superficie de separación del agua. Calcula:

a) La dirección que tendrá el rayo luminoso al propagarse dentro del agua, sabiendo que el índice de refracción del agua es 1,33 y se toma como índice de refracción para el aire 1.
b) La velocidad de propagación de la luz en el agua. (c = 300 000 km/s).

a) Según la ley de Snell:

$$\frac{\text{sen}\,\hat{i}}{\text{sen}\,\hat{r}} = \frac{n_2}{n_1}$$

Como el medio 1 es el aire, despejando y sustituyendo:

$$\text{sen}\,\hat{r} = \frac{\text{sen}\,\hat{i}}{n_2} = \frac{\text{sen}\,45^\circ}{1{,}33} = 0{,}531$$

$$\hat{r} = \text{arcsen}\,0{,}532 = \boxed{32{,}1^\circ}$$

b) **Índice de refracción absoluto de una sustancia** es el cociente entre la velocidad de propagación de las ondas luminosas en el vacío y la velocidad de propagación en dicho medio.

$$v_2 = \frac{c}{n_2} = \frac{300\,000}{1{,}33} = \boxed{225\,564 \text{ km/s}}$$

14 *Septiembre 99 - 1,25 puntos*

Explica brevemente cuál es la diferencia fundamental entre la hipótesis de Newton y la de Huygens sobre la naturaleza de la luz.

Newton justifica su teoría **corpuscular** de la luz diciendo que consistía en un chorro de partículas emitidas por la fuente luminosa. Los demás cuerpos se ven debido a que reflejan algunos de los corpúsculos que los golpean. Al llegar las partículas emitidas y reflejada al ojo, producen la sensación de ver.

Huygens defiende la teoría **ondulatoria** de la luz, afirmaba que, al igual que el sonido, la luz es un movimiento ondulatorio. Así como las ondas sonoras se propagan en el aire, las ondas luminosas necesitan también de un medio, extremadamente sutil y de perfecta elasticidad, que las permita propagarse y que llene el vacío, el éter. Su teoría permitía explicar fenómenos conocidos como la reflexión, refracción, interferencias, etc.

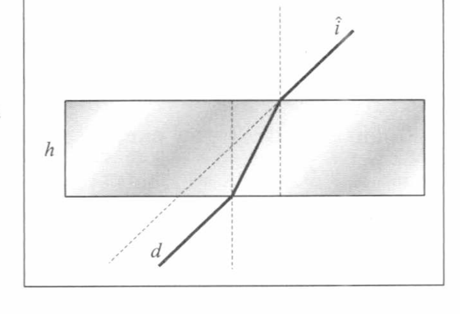
15 *Septiembre 99 - 1,25 puntos*

Un rayo de luz atraviesa una lámina de vidrio plano de espesor 4 cm incidiendo con un ángulo de 30°. Por efecto de la refracción, al salir se ha desplazado una distancia D paralelamente a sí mismo. Sabiendo $n_{(\text{vidrio})} = 1{,}35$, $n_{(\text{aire})} = 1$. ¿Cuál es la distancia desplazada?

Una lámina de vidrio plano es una lámina de caras paralelas que tiene la propiedad de que cualquier rayo de luz que lo atraviese no se desvía y tan solo sufre un desplazamiento lateral "*d*" que vale

$$d = \frac{h}{\cos\hat{r}} \cdot \text{sen}\,(\hat{i} - \hat{r})$$

siendo: h = espesor de la lámina
$\hat{i}$ = ángulo de incidencia
$\hat{r}$ = ángulo de refracción



Primero calcularemos el ángulo $\hat{r}$ aplicando la ley de Snell

$$\frac{\text{sen}\,\hat{i}}{\text{sen}\,\hat{r}} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \text{sen}\,\hat{r} = \text{sen}\,30^\circ \frac{1}{1{,}35} = 0{,}37$$

$$\hat{r} = \text{arcsen}\,0{,}37 = 21{,}7^\circ$$

Y por tanto:

$$d = \frac{4}{\cos 21{,}7^\circ} \cdot \text{sen}\,(30 - 21{,}7) = \boxed{0{,}62 \text{ cm}}$$

16 *Junio 2000 - 1,25 puntos*

Un rayo luminoso incide desde el agua sobre la superficie de separación con el aire. Calcula:

a) El ángulo de refracción si el de incidencia es de 25°.
b) El ángulo límite.

(Datos: $n_{(agua)} = 1{,}33$; $n_{(aire)} = 1$)

a) Según la ley de Snell:

$$\frac{\text{sen}\,\hat{i}}{\text{sen}\,\hat{r}} = \frac{n_2}{n_1}$$

Como en este caso el 2° medio es el aire $n_2 = 1$, y de ahí que despejando y sustituyendo datos:

$$\text{sen}\,\hat{r} = \text{sen}\,\hat{i} \cdot \frac{n_1}{1} = \text{sen}\,25^\circ \cdot 1{,}33 = 0{,}562$$

Luego:

$$\hat{r} = \text{arcsen}\,0{,}561 = \boxed{34{,}2^\circ}$$

b) Se define como ángulo límite $\hat{\alpha}_L$ aquel ángulo de incidencia para el que el ángulo de refracción es máximo, es decir 90°.

Considerando estas circunstancias en la ley de Snell y que el segundo medio es el aire, nos queda:

$$\text{sen}\,\alpha_L = \frac{1}{1{,}33}$$

De donde:

$$\hat{\alpha}_L = \text{arcsen}\,\frac{1}{1{,}33} = \boxed{48{,}8^\circ}$$

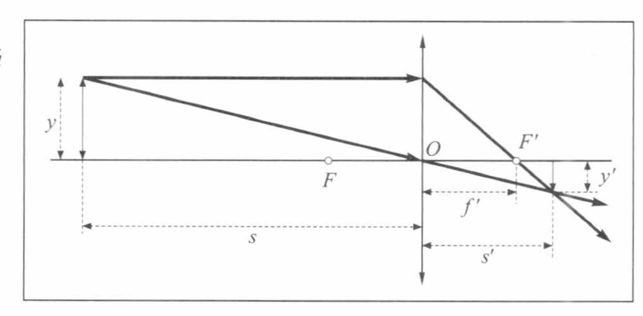
Por encima de este ángulo de incidencia no se produce refracción sino reflexión en el mismo medio.

17

Junio 2000 - 1,25 puntos

Obtén gráficamente la imagen de un objeto que está situado a una distancia de una lente delgada convergente mayor que el doble de la distancia focal.

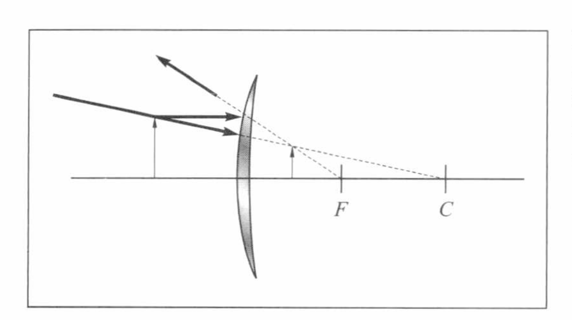
La imagen es invertida, real, menor que el objeto y está situada entre F' y 2F'.



18

Septiembre 2000 - 1,25 puntos

Construye la imagen producida por un espejo convexo e indica cómo es esa imagen.



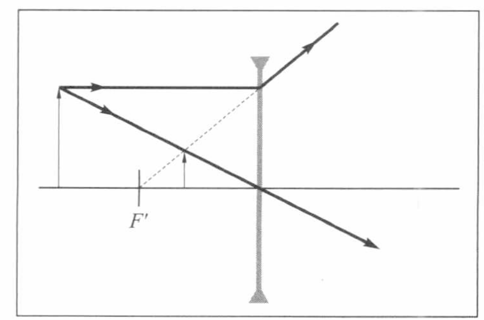
En cualquier posición del objeto, un espejo esférico convexo produce una imagen virtual, derecha y de menor tamaño que el objeto y situadas entre el foco y el espejo.

19

Septiembre 2000 - 1,25 puntos

¿Cómo son las imágenes de las lentes divergentes? Justifica gráficamente la respuesta.

En las lentes divergentes. para cualquier posición del objeto, la imagen es derecha, virtual, menor que el objeto y situada entre el foco *F'* y la lente.



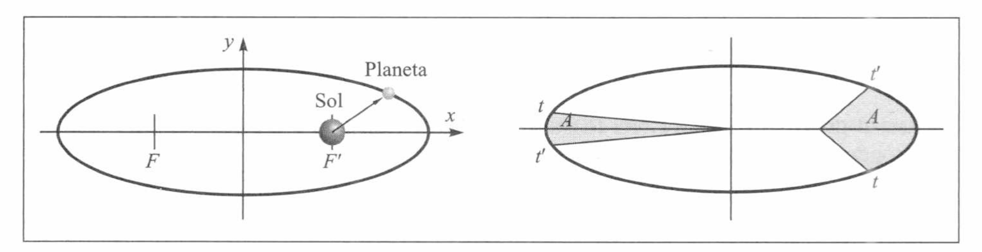
TEMA 3

CAMPO GRAVITATORIO

RESUMEN TEÓRICO DEL TEMA

1. Leyes de Keppler

- **1ª Ley** (conocida como ley de las órbitas).
  Los planetas se mueven en órbitas elípticas, en uno de cuyos focos está el Sol.
- **2º Ley** (conocida como ley de las áreas).
  En su movimiento, el radio vector de los planetas con respecto al Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.



- **3º Ley** (conocida como ley de los períodos).
  Los cuadrados de los períodos de revolución de los planetas alrededor del Sol son proporcionales a los cubos de las distancias medias de los respectivos planetas al Sol.

$$T^2 = C \cdot r^3$$

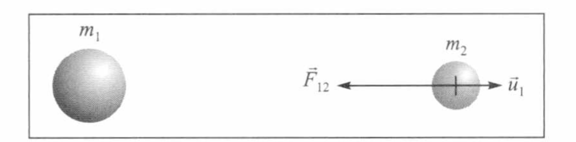
  Donde C es una constante.

2. Ley de Newton de la Gravitación Universal

Esta ley expresa el valor de la fuerza de atracción entre dos masas y puede enunciarse de este modo:

Dos partículas materiales se atraen mutuamente con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

$$\vec{F}_{12} = -G\,\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}\,\vec{u}_1$$

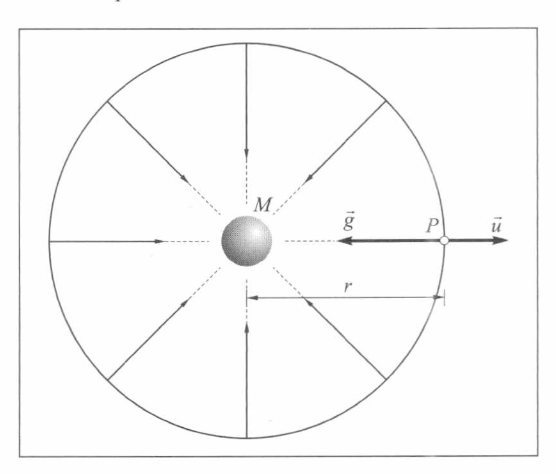


3. Campo gravitatorio. Intensidad de campo gravitatorio

Llamamos **campo gravitatorio** a la perturbación que un cuerpo produce en el *espacio* que lo rodea por el hecho de tener *masa*.

La intensidad del **campo gravitatorio**, $\vec{g}$, en un punto del espacio es la fuerza que actuaría sobre la unidad de masa situada en dicho punto.

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\frac{-GMm\vec{u}}{r^2}}{m} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}$$



En el caso de que existan varias masas puntuales se cumple el **principio de superposición**:

El campo gravitorio resultante en un punto es igual a la suma de los campos debidos a cada una de las masas en ese punto.

$$\vec{g} = \sum_i \vec{g}_i = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \ldots$$

La fuerza gravitatoria sobre una masa *m*, situada en un punto en que la intensidad del campo gravitatorio es $\vec{g}$, se expresa:

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

4. Potencial gravitatorio. Energía potencial gravitatoria

El **potencial gravitatorio** en un punto del espacio es el trabajo que realiza el campo gravitatorio para trasladar la unidad de masa desde dicho punto hasta el infinito.

Si asignamos un valor cero de potencial a los puntos situados a distancia infinita de la masa M ($r \rightarrow \infty$), obtenemos:

$$V = -G\frac{M}{r}$$

Si en lugar de la unidad de masa se traslada una masa m del punto A al punto B, el trabajo realizado por el campo gravitatorio será:

$$W = m\,(V_A - V_B)$$

La energía potencial gravitatoria de esta masa en un punto del espacio se relaciona con el potencial gravitatorio en dicho punto:

$$Ep = mV$$

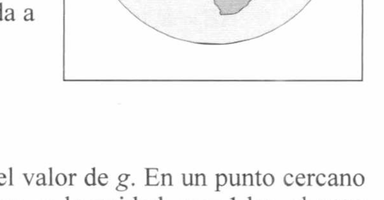
En el caso de que existan varias masa puntuales se cumple el **principio de superposición**:

$$V = \sum_i V_i = V_1 + V_2 + \ldots$$

5. El campo gravitatorio terrestre

Apliquemos lo anterior al caso de la Tierra, de masa M y radio R. Como normalmente se suele hacer referencia a su superficie, hay que tener en cuenta que si la distancia de cualquier punto al centro de la Tierra es r y está a una altura h con respecto a su superficie, es:

$$r = R + h$$



Con ello, el módulo del campo gravitatorio creado es:

$$g = G\frac{M}{(R+h)^2}$$

En las proximidades de su superficie, donde h es despreciable frente al radio R, se puede poner $R + h \approx R$ y entonces tenemos:

$$g_0 = G\frac{M}{R^2} = 9{,}8\ \text{N/kg}$$

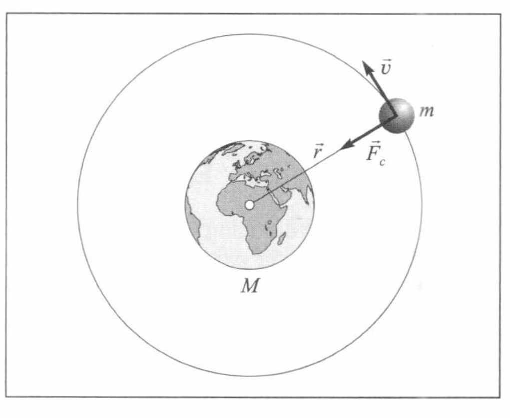
La fuerza ejercida sobre un cuerpo de masa m colocada a una altura h sobre la superficie terrestre será:

$$F = mg = G\frac{m \cdot M}{(R+h)^2}$$

Esta fuerza se llama **peso** y evidentemente depende del valor de g. En un punto cercano a la superficie es $p = m \cdot 9{,}8$, y si la masa de un cuerpo es la unidad, $m = 1$ kg, el peso será de $p = 9{,}8$ N.

6. Satélites artificiales: Velocidad orbital de un satélite y energía orbital

Para que un satélite de masa m esté en órbita circular estable alrededor de la Tierra, la fuerza de atracción gravitatoria ha de ser igual a la fuerza centrípeta necesaria para conservarlo en dicha órbita.



$$F_c = ma_c\ ; \qquad G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

Ello nos permite calcular la velocidad orbital del satélite alrededor de la Tierra:

$$v^2 = G\frac{M}{r}$$

Y por tanto, su energía cinética será:

$$Ec = G\frac{Mm}{2r}$$

La energía total que tiene el satélite en su órbita es la suma de su energía potencial más su energía cinética.

$$E = Ec + Ep = G\frac{Mm}{2r} - G\frac{Mm}{r}$$

Que da una energía total:

$$E = -G\frac{Mm}{2r}$$

El tiempo que tarda un satélite en describir una órbita completa se denomina **período de revolución**, *T*, y también período orbital.

El período orbital se relaciona con la velocidad orbital mediante las leyes del movimiento circular uniforme:

$$v = w \times r \qquad \text{y} \qquad w = \frac{2\pi}{T}$$

7. Energía necesaria para cambiar de órbita un satélite: velocidad de lanzamiento y velocidad de escape

Si un satélite parte de una órbita de radio r_1, y pasa a otra de radio r_2, la variación de energía será:

$$\Delta E = E_{T^2} - E_{T^1} = \left(-\frac{1}{2}\frac{GMm}{r_2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\frac{GMm}{r_1}\right) = \frac{GMm}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

si el resultado es positivo, la energía de la segunda órbita es mayor que la de la primera; por tanto, hay que suministrar energía al satélite; en caso contrario, el satélite debe perder energía para cambiar de órbita.

La **velocidad de escape** v_e, es la velocidad que debe adquirir un cuerpo para escapar de la atracción gravitatoria terrestre. Se considera que el cuerpo escapa del campo gravitatorio terrestre cuando llega a una distancia infinita de la Tierra ($Ep = 0$) con velocidad nula ($Ec = 0$), Entonces, su energía mecánica debe ser nula.

$$E = Ec + Ep = \frac{1}{2}mv_e^2 - \frac{GMm}{r} = 0$$

De aquí deducimos el valor de esta velocidad.

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

CUESTIONES Y EJERCICIOS DE CAMPO GRAVITATORIO

1. La intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la Tierra es, aproximadamente, 6 veces la existente en la superficie de la Luna. Sabemos que un hilo se rompe si se le cuelga, en la Tierra, un cuerpo de 5 kg. ¿Qué masa en kg, rompería ese mismo hilo en la Luna? Razona la respuesta. (Solución: 30 kg)

2. Calcula la energía total que tiene un satélite de 500 kg y que se encuentra describiendo una órbita de radio 800 km sobre la superficie terrestre. ($G = 6{,}68 \cdot$

$\cdot\ 10^{-11}$ Nm²/kg². La Tierra tiene $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, $R = 6\ 370$ km). (Solución: $-1{,}38 \cdot 10^{10}$ J)

3. Supongamos que repentinamente el Sol se colapsara (redujera su tamaño) hasta convertirse en una estrella de las denominadas enanas blancas (unos 5 000 km de radio); pero sin pérdida de masa. ¿Qué le ocurriría al radio de la órbita de la Tierra alrededor del Sol?

4. Un satélite está girando alrededor de la Tierra describiendo una órbita elíptica. Se denomina apogeo al punto de la órbita más alejado de la Tierra, y perigeo al más cercano. ¿En cuál de estos puntos tiene el satélite mayor energía cinética? Razónalo.

5. La diferencia de potencial gravitatorio entre la superficie de un cuerpo celeste y un punto situado a 5 m por encima de su superficie es de 8 J/kg. Suponiendo que el campo gravitatorio es uniforme, calcula la intensidad de dicho campo gravitatorio. (Solución: 8/5 N/kg)

6. Calcula el período de un satélite que órbita alrededor de la Tierra a una altura de 630 km sobre el nivel del mar. Da el resultado en horas. (Datos: $G = 6{,}68 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg². La Tierra tiene $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, $R = 6\ 370$ km). (Solución: 1,62 horas)

7. Calcula el período de la órbita de la Luna alrededor de la Tierra, suponiendo que la órbita lunar es una circunferencia de radio 384 000 km. Expresa el resultado en días, con una sola cifra decimal (Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg². Datos terrestres $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg). (Solución: 27,4 días)

8. Explica por qué es correcta la siguiente frase: La Luna, en su movimiento de rotación alrededor de la Tierra, está en equilibrio porque la fuerza hacia fuera que actúa sobre la Luna debida a su movimiento, equilibra exactamente la atracción gravitatoria que ejerce la Tierra sobre ella.

9. Titán es el mayor satélite de Saturno. Sabemos que Titán describe una órbita de radio medio, $R = 1{,}22 \cdot 10^{9}$ m y tarda 15,95 días en recorrerla. Determina la masa de Saturno. (Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg²). (Solución: $5{,}66 \cdot 10^{26}$ kg)

10. Elige la opción que creas correcta y razónala brevemente. La aceleración de la gravedad cerca de la superficie terrestre vale 9,8 m/s², pero en el centro de la Tierra es:

    a) Un poco menos de 9,8 m/s².
    b) Un poco más de 9,8 m/s².
    c) Cero.
    d) Mucho más de 9,8 m/s².

11. En torno a cierto planeta giran dos satélites; los llamaremos S_1 y S_2. S_1 tiene un período de revolución de 32 días y S_2 lo tiene de 256 días. Si el radio de la órbita de S_1 es igual a 1 (en unidades de longitud arbitrarias). ¿Cuánto valdrá el radio de la órbita de S_2? (Solución: 4 unidades)

12. Dos satélites están girando alrededor de la Tierra, siendo sus órbitas circulares de distinto radio. ¿Cuál de ellos girará con mayor velocidad angular? ¿Y con mayor velocidad lineal? Razona tu respuesta.

13. Velocidad de escape: defínela y deduce su valor para el campo gravitatorio terrestre. (Datos: $G = 6{,}68 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg². La Tierra tiene $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, $R = 6\ 370$ km). (Solución: $1{,}18 \cdot 10^{4}$ m/s)

14. ¿Depende la velocidad de escape de la masa del objeto que queremos que se escape de la atracción del campo gravitatorio terrestre? Supongamos que el objeto está inicialmente sobre la superficie terrestre. Razona tu respuesta.

15. Una nave espacial se encuentra en órbita circular alrededor de la Tierra y durante unos segundos enciende sus retrocohetes. ¿Qué le ocurre a la energía total de la nave, al radio de la órbita y a su energía cinética? Razona tus respuestas. Ayuda: Los retrocohetes de las naves espaciales apuntan en la dirección y sentido del movimiento de la nave.

16. Un satélite de telecomunicaciones ha sufrido una avería y se encuentra en una órbita circular tan baja que está dentro de la atmósfera terrestre, por lo que sobre él actúa una fuerza de rozamiento que podemos suponer constante. Debido a ese rozamiento el radio de la órbita va disminuyendo poco a poco. Razona los cambios producidos en la energía potencial, en la energía cinética y en la energía total.

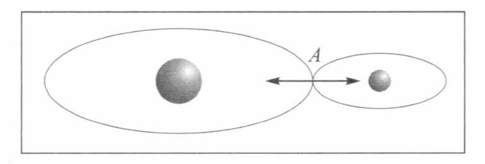
17. Para el estudio de los cultivos y de la cantidad de agua que necesitan, se suelen utilizar los datos que proporcionan el satélite meteorológico Landsat que gira alrededor de la Tierra pasando por los polos. El período de este satélite es de 1,72 horas. Calcula la altura sobre la superficie de la Tierra a la que este satélite la circunvala, suponiendo que la órbita sea circular. (Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m^2/kg^2; Masa de la Tierra: $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; Radio de la Tierra: $R_T = 6\,370$ km). (Solución: $9{,}1 \cdot 10^5$ m)

18. Un planeta de un lejano sistema solar tiene una masa igual a 0,82 veces la masa de la Tierra y su radio es 0,95 el radio terrestre. Calcula el cociente entre la velocidad de escape desde la superficie de este satélite y la velocidad de escape desde la superficie de la Tierra. (Solución: 0,93).

19. ¿Qué trabajo deben realizar los motores de una nave espacial de 5 000 kg que gira alrededor de la Tierra para cambiar de una órbita de radio $r_0 = 3\,R_T$ hasta otra órbita de radio $r_1 = 4\,R_T$. (Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m^2/kg^2. Masa de la Tierra: $M_T =$ $= 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; Radio de la Tierra: $R_T = 6\,370$ km). (Solución: $1{,}30 \cdot 10^{10}$ J).

20. Calcula el período de un satélite artificial que órbita la Tierra a una distancia de 10 km sobre la superficie terrestre. (Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m^2/kg^2: Masa de la Tierra: $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg. Radio de la Tierra: $R_T = 6\,370$ km). (Solución: 5 070 s)

21. Cuando se realizan viajes a la luna la trayectoria es parecida a la figura, (tiene forma de ocho y no de elipse.). En el punto A el satélite abandona la órbita terrestre y se incorpora a la órbita lunar. ¿Qué particularidad se produce en dicho punto *A*?



22. Un satélite artificial de masa 200 kg, describe una trayectoria circular de radio $r = 25\,000$ km. Determinar:

a) La velocidad del satélite. (Solución: 3 994 m/s)
b) La energía total que posee. (Solución: $-1{,}59 \cdot 10^9$ J)
c) El período de revolución. (Solución: 39 328 s)

23. Calcular el valor del campo y del potencial gravitatorio creado por dos masas puntuales iguales y separadas 1 m entre sí, en el punto medio de la recta que une las

dos masas. Expresa el resultado en función de G y m. (Solución: $g = 0$; $V = -4$ GM)

24. Calcula el mínimo trabajo que hay que realizar para elevar un satélite artificial de 500 kg de masa desde la superficie de la tierra hasta una altura de $h = R_T/5$. Suponemos que no hay variación de energía cinética y despreciamos el rozamiento. (Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²; Masa de la Tierra: $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; Radio de la Tierra: $R_T = 6\,370$ km). (Solución: $5{,}24 \cdot 10^{9}$ J)

25. Dadas 2 esferas de masas 2 kg y 4 kg situadas, respectivamente, en los puntos (0, 0) y (6, 0) de un sistema de coordenadas cartesianas, representado en metros. Calcular:

a) La intensidad del campo gravitatorio, debido a esas masas, en los puntos (3, 4) y (3, 0). (Solución: $\vec{g} = 3{,}2 \cdot 10^{-12}\,\vec{i} - 12{,}8 \cdot 10^{-12}\,\vec{j}$ N/kg)

b) El trabajo necesario para transportar otra esfera de masa 2 kg desde el punto (3, 4) al punto (3, 0). (Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²). (Solución: $-1{,}1 \cdot 10^{-10}$ J)

26. Dos satélites de igual masa están situados en órbitas de radios R y $2R$ respectivamente. ¿Cuál de los dos tiene más velocidad? Si las masas fueran distintas, influirían en sus velocidades? Justifica las respuestas.

27. ¿Cuál sería el valor de la intensidad del campo gravitatorio terrestre, si aumenta el radio de la Tierra al doble de su valor, conservándose su masa? $g_0 = 9{,}8$ N/kg. (Solución: $g = g_0/4$)

28. ¿Qué trabajo tendríamos que hacer para trasladar una masa M, dentro del campo gravitatorio terrestre, desde un punto A a otro B que están a la misma distancia del centro de la tierra? ¿Qué forma tendrán las superficies equipotenciales del campo gravitatorio terrestre? Justifica la respuesta. (Solución: 0 J)

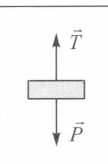
29. Si la masa de un cuerpo es de 10 kg. ¿Cuánto pesaría a 20 000 m de altura sobre el nivel del mar? (Datos: $g_0 = 9{,}8$ N/kg, $R_T = 6\,370$ km). (Solución: 97,4 N)

CUESTIONES Y EJERCICIOS RESUELTOS DE CAMPO GRAVITATORIO

1 *Junio 1992 - 1 punto*

La intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la Tierra es, aproximadamente, 6 veces la existente en la superficie de la Luna. Sabemos que un hilo se rompe si se le cuelga, en la Tierra, un cuerpo de 5 kg. ¿Qué masa en kg, rompería ese mismo hilo en la Luna? Razona la respuesta.

Calculamos la tensión que soporta el hilo aplicando la 2ª ley de Newton:



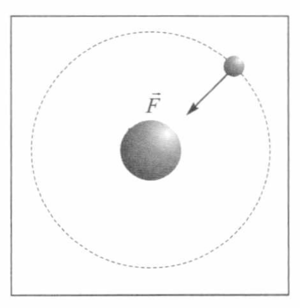
$$T = m \cdot g = 5 \cdot 9{,}8 = 49 \text{ N}$$

Como en la Luna el hilo soporta la misma tensión su masa será:

$$T = m' \cdot g_L \;\Rightarrow\; 49 = m' \cdot \frac{9{,}8}{6} \;\Rightarrow\; \boxed{m' = 30 \text{ kg}}$$

2 *Septiembre 1992 - 1 punto*

Calcula la energía total que tiene un satélite de 500 kg y que se encuentra describiendo una órbita de radio 800 km sobre la superficie terrestre. ($G = 6{,}68 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg². La Tierra tiene $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, $R = 6\,370$ km).



Sabemos que la fuerza centrípeta que actúa sobre la masa de 500 kg es la fuerza gravitatoria debida a la superficie terrestre. Aplicando la 2ª ley de Newton al satélite obtenemos:

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{r}$$

La energía total de un satélite viene dada por la suma de la energía cinética y energía potencial:

$$E_T = Ec + Ep = \frac{mv^2}{2} + \left(\frac{-GMm}{r}\right) = \frac{mGm}{2r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r} = \boxed{-1{,}38 \cdot 10^{10}\ \text{J}}$$

3 *Junio 93 - 1 punto*

Supongamos que repentinamente el Sol se colapsara (redujera su tamaño) hasta convertirse en una estrella de las denominadas enanas blancas (unos 5 000 km de radio); pero sin pérdida de masa. ¿Qué le ocurriría al radio de la órbita de la Tierra alrededor del Sol?

La fuerza de atracción entre dos masas viene dada por la ley de gravitación universal:

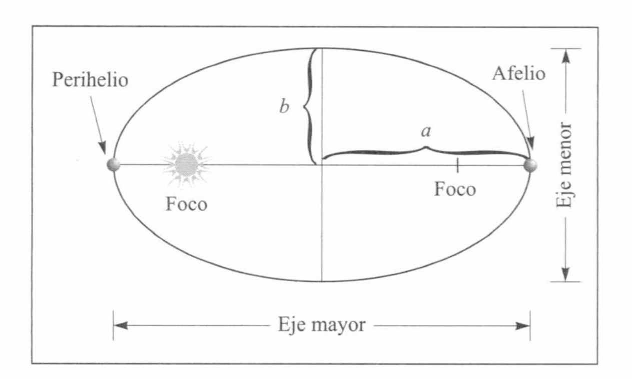
$$F_G = \frac{GMm}{r^2}$$

Podemos deducir que al no variar las masas y la distancia entre ellas F_G tendrá el mismo valor, y *el radio de la órbita alrededor del Sol seguirá siendo el mismo.*

4 *Septiembre 93 - 1 punto*

Un satélite está girando alrededor de la Tierra describiendo una órbita elíptica. Se denomina apogeo al punto de la órbita más alejado de la Tierra, y perigeo al más cercano. ¿En cuál de estos puntos tiene el satélite mayor energía cinética? Razónalo.

Según la 2ª ley de Kepler: Los radios vectores de los planetas con respecto al Sol, barren áreas iguales en tiempos iguales, por tanto, el planeta llevaría más velocidad y como consecuencia *mayor energía cinética cuanto más cerca esté del Sol.*



5 *Septiembre 93 - 1 punto*

La diferencia de potencial gravitatorio entre la superficie de un cuerpo celeste y un punto situado a 5 m por encima de su superficie es de 8 J/kg. Suponiendo que el campo gravitatorio es uniforme, calcula la intensidad de dicho campo gravitatorio.

Teniendo en cuenta que el campo gravitatorio es uniforme, la relación entre la intensidad de campo y la diferencia de potencial es:

$$g = \frac{|V_A - V_B|}{d} = \boxed{\frac{8}{5}\ \text{N/kg}}$$

6 *Junio 94 - 1 punto*

Calcula el período de un satélite que órbita alrededor de la Tierra a una altura de 630 km sobre el nivel del mar. Da el resultado en horas. (Datos: $G = 6{,}68 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2. La Tierra tiene $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, $R = 6\,370$ km).

La fuerza centrípeta que actúa sobre el satélite, coincide con la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra:

$$F_G = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{Gm}{r}} = 7\,547{,}9 \text{ m/s}$$

La relación entre la velocidad lineal y la velocidad angular en un movimiento circular uniforme viene dada por:

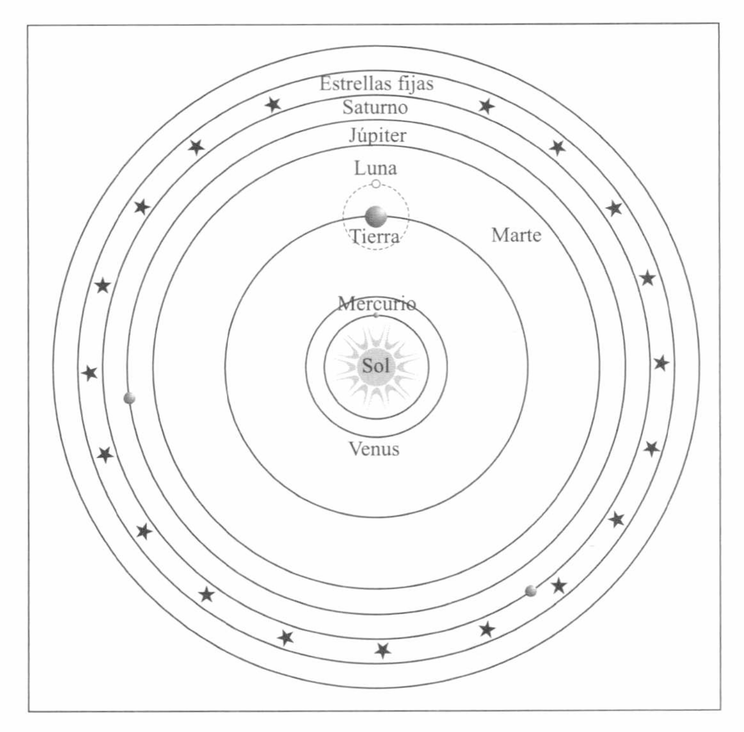
$$w = \frac{v}{r} = \frac{7\,547{,}9}{7 \cdot 10^6} = 1{,}1 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$$

Por tanto:

$$T = \frac{2\pi}{w} = 5\,857{,}08 \text{ s} \frac{1 \text{ h}}{3\,600 \text{ s}} = \boxed{1{,}62 \text{ h}}$$

7 *Septiembre 94 - 1 punto*

Calcula el período de la órbita de la Luna alrededor de la Tierra, suponiendo que la órbita lunar es una circunferencia de radio 384 000 km. Expresa el resultado en días, con una sola cifra decimal (Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2. Datos terrestres $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg).



Aplicando la 2ª ley de Newton a la Luna en su movimiento alrededor de la Tierra, obtenemos:

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = 1{,}018 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

Al tratarse de un movimiento circular uniforme el período será:

$$T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{v/r} = \frac{2\pi r}{v} = 2{,}37 \cdot 10^6 \text{ s} = \boxed{27{,}4 \text{ días}}$$

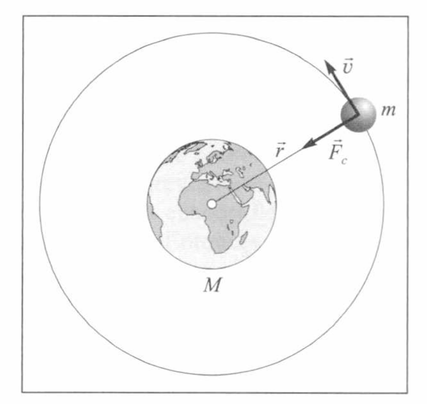
8 *Junio 95 - 1 punto*

Explica por qué es correcta la siguiente frase: La Luna, en su movimiento de rotación alrededor de la Tierra, está en equilibrio porque la fuerza hacia fuera que actúa sobre la Luna debida a su movimiento, equilibra exactamente la atracción gravitatoria que ejerce la Tierra sobre ella.

La fuerza hacia fuera que actúa sobre la Luna es la fuerza centrífuga, es una fuerza de inercia o ficticia que utiliza un observador en un sistema de referencia no inercial, (en la Luna) para hacer válidas las leyes de Newton.

9 *Junio 96 - 1 punto*

Titán es el mayor satélite de Saturno. Sabemos que Titán describe una órbita de radio medio, $R = 1,22 \cdot 10^9$ m y tarda 15,95 días en recorrerla. Determina la masa de Saturno. (Dato: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2).



Para hallar la masa de Saturno debemos conocer cuál es la velocidad lineal de Titán:

$$v = w \cdot r = \frac{2\pi \cdot r}{T} = 5,55 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

Aplicando la 2ª ley de Newton y teniendo en cuenta la ley de Gravitación Universal:

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow \boxed{M = \frac{v^2 \cdot r}{G} = 5,64 \cdot 10^{26} \text{ kg}}$$

10 *Septiembre 96 - 1 punto*

Elige la opción que creas correcta y razónala brevemente. La aceleración de la gravedad cerca de la superficie terrestre vale 9,8 m/s^2, pero en el centro de la Tierra es:

a) Un poco menos de 9,8 m/s^2.
b) Un poco más de 9,8 m/s^2.
c) Cero.
d) Mucho más de 9,8 m/s^2.

La gravedad a una profundidad h puede ser calculada mediante la expresión:

$$g_h = g_0 \cdot \frac{R-h}{R} = \frac{g_0}{R} x$$

siendo x la distancia del punto considerado al centro de la Tierra. Si $x = 0$ *la gravedad será cero*. (0).

11 *Septiembre 96 - 1 punto*

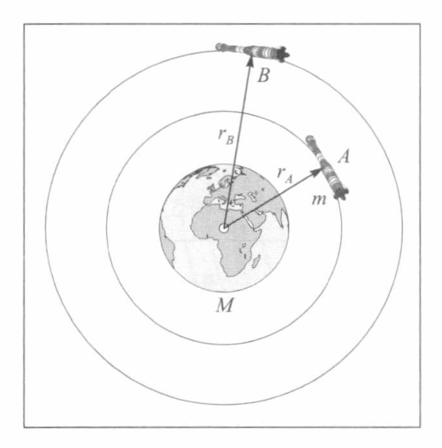
En torno a cierto planeta giran dos satélites; los llamaremos S_1 y S_2. S_1 tiene un período de revolución de 32 días y S_2 lo tiene de 256 días. Si el radio de la órbita de S_1 es igual a 1 (en unidades de longitud arbitrarias). ¿Cuánto valdrá el radio de la órbita de S_2?

Basándonos en la 3ª ley de Kepler. Los cuadrados de los períodos son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las respectivas órbitas.

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} \Rightarrow r_2 = \sqrt[3]{\frac{T_2^2 \cdot r_1^3}{T_1^2}} = \boxed{\text{4 unidades de longitud}}$$

12 *Junio 97 - 1 punto*

Dos satélites están girando alrededor de la Tierra, siendo sus órbitas circulares de distinto radio. ¿Cuál de ellos girará con mayor velocidad angular? ¿Y con mayor velocidad lineal? Razona tu respuesta.



De la 3ª ley de Kepler enunciada en la cuestión anterior podemos deducir:

$$\frac{T_A^2}{r_A^3} = \frac{T_B^2}{r_B^3}$$

Si $\boxed{r_B > r_A} \Rightarrow T_B > T_A$

y como

$$\boxed{w = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow w_B < w_A}$$

Si el radio de la órbita es mayor, su velocidad angular es menor.

Para un satélite moviéndose en órbita circular alrededor de la Tierra, su fuerza centrípeta es igual a la fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre el satélite.

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

De la expresión obtenida es fácilmente deducible que a mayor radio, menor velocidad lineal.

13 *Junio 97 - 1 punto*

Velocidad de escape: defínela y deduce su valor para el campo gravitatorio terrestre. (Datos: $G = 6{,}68 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg². La Tierra tiene $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, $R =$ = 6 370 km).

Se llama **velocidad de escape** a la velocidad que debe adquirir un cuerpo para que escape de la atracción de la Tierra.

En el momento del escape, la energía cinética debe ser igual al incremento de la energía potencial, ya que se conserva la energía mecánica por moverse en un campo conservativo.

$$\frac{mv_e^2}{2} = 0 - \left(-\frac{GMm}{R_T}\right)$$

De donde se deduce que:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R_T}} = \boxed{1{,}18 \cdot 10^4 \text{ m/s}}$$

14 *Septiembre 97 - 1 punto*

¿Depende la velocidad de escape de la masa del objeto que queremos que se escape de la atracción del campo gravitatorio terrestre? Supongamos que el objeto está inicialmente sobre la superficie terrestre. Razona tu respuesta.

La **velocidad de escape**, v_e, es la velocidad que debe adquirir un cuerpo para escapar de la atracción gravitatoria terrestre. Se considera que un cuerpo escapa del campo gravitatorio terrestre cuando llega a una distancia infinita de la Tierra ($Ep = 0$) con velocidad nula ($Ec = 0$). Entonces su energía mecánica debe ser nula.

$$E = E_\infty = 0 \;\Rightarrow\; E = Ec + Ep = \frac{mv_e^2}{2} - \frac{GMm}{r} = 0$$

De aquí deducimos el valor de esta velocidad.

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

La velocidad de escape no depende de la masa del objeto y es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la distancia al centro de la Tierra.

15 *Junio 98 - 1 punto*

Una nave espacial se encuentra en órbita circular alrededor de la Tierra y durante unos segundos enciende sus retrocohetes. ¿Qué le ocurre a la energía total de la nave, al radio de la órbita y a su energía cinética? Razona tus respuestas. Ayuda: Los retrocohetes de las naves espaciales apuntan en la dirección y sentido del movimiento de la nave.

Suponiendo que los retrocohetes se oponen al movimiento de la nave, *su energía total disminuiría, siendo su energía total más negativa.*

La energía mecánica de la nave viene dada por:

$$E = -\frac{GMm}{2r}$$

Si la energía es más pequeña de la expresión anterior se deduce que *r disminuye.*

La energía cinética de la nave puede calcularse mediante la ecuación:

$$Ec = \frac{mv^2}{2} = \frac{GMm}{2r}$$

Al disminuir el radio de la órbita su *energía cinética será mayor*.

16 *Junio 99 - 1 punto*

Un satélite de telecomunicaciones ha sufrido una avería y se encuentra en una órbita circular tan baja que está dentro de la atmósfera terrestre, por lo que sobre él actúa una fuerza de rozamiento que podemos suponer constante. Debido a ese rozamiento el radio de la órbita va disminuyendo poco a poco. Razona los cambios producidos en la energía potencial, en la energía cinética y en la energía total.

Tanto la energía cinética como la potencial y la total son inversamente proporcionales a r, la primera es positiva y las otras dos negativas:

$$E = -\frac{GMm}{2r}; \qquad Ec = \frac{mv^2}{2} = \frac{GMm}{2r}; \qquad Ep = -\frac{GMm}{r}$$

Cuando r disminuye la energía cinética aumentará, la potencial disminuirá y la energía total también disminuirá.

17 *Septiembre 99 - 1 punto*

Para el estudio de los cultivos y de la cantidad de agua que necesitan, se suelen utilizar los datos que proporcionan el satélite meteorológico Landsat que gira alrededor de la Tierra pasando por los polos. El período de este satélite es de 1,72 horas. Calcula la altura sobre la superficie de la Tierra a la que este satélite la circunvala, suponiendo que la órbita sea circular. (Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²; Masa de la Tierra: $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; Radio de la Tierra: $R_T = 6\,370$ km).

Aplicando la 2ª ley de Newton al satélite Lansadt:

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{r}$$

La relación entre la velocidad lineal y el período en un movimiento circular uniforme viene dada por:

$$v = \frac{2\pi}{T} \cdot r \Rightarrow v^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r^2$$

Igualando las dos ecuaciones anteriores y despejando r obtenemos:

$$\frac{GM}{r} = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r^2 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = 7{,}28 \cdot 10^6 \text{ m}$$

La altura sobre la superficie de la Tierra a la que está este satélite será:

$$\boxed{h = r - R_T = 9{,}1 \cdot 10^5 \text{ m}}$$

18 *Junio 97 - 1,25 puntos*

Un planeta de un lejano sistema solar tiene una masa igual a 0,82 veces la masa de la Tierra y su radio es 0,95 el radio terrestre. Calcula el cociente entre la velocidad de escape desde la superficie de este satélite y la velocidad de escape desde la superficie de la Tierra.

La **velocidad de escape**, v_e, es la velocidad que debe adquirir un cuerpo para escapar de la atracción gravitatoria terrestre. Se considera que un cuerpo escapa del campo gravitatorio terrestre cuando llega a una distancia infinita de la Tierra ($Ep = 0$) con velocidad nula ($Ec = 0$). Entonces su energía mecánica debe se nula.

$$E = E_\infty = 0 \Rightarrow E = Ec + Ep = \frac{mv_e^2}{2} - \frac{GMm}{r} = 0$$

De aquí deducimos el valor de esta velocidad.

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

En el planeta lejano la velocidad de escape vendrá dada por:

$$v_{ep} = \sqrt{\frac{2G0{,}82M}{0{,}95r}}$$

Y el cociente entre la velocidades de escape será igual a:

$$\boxed{\frac{v_{ep}}{v_e} = \sqrt{\frac{0{,}82}{0{,}95}}}$$

19 *Septiembre 97 - 3,75 puntos*

¿Qué trabajo deben realizar los motores de una nave espacial de 5 000 kg que gira alrededor de la Tierra para cambiar de una órbita de radio $r_0 = 3\ R_T$ hasta otra órbita de radio $r_1 = 4\ R_T$. (Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg². Masa de la Tierra: $M_T =$ $= 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; Radio de la Tierra: $R_T = 6\ 370$ km).

La energía mecánica de un satélite en una órbita estacionaria viene dada por la suma de su energía cinética y potencial:

$$Em = -\frac{GMm}{2r}$$

Si queremos que un satélite cambie de una órbita r_0 hasta otra órbita de radio r_1 habrá que realizar un trabajo igual a la diferencia de energía de enlace final e inicial.

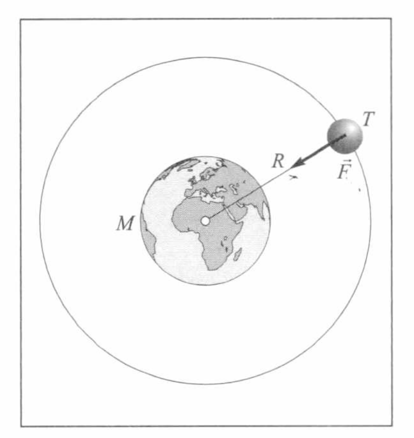
$$W_{ext} = Em_B - Em_A = -\frac{GMm}{8R} - \left(-\frac{GMm}{6R}\right)$$

Simplificando y sustituyendo datos:

$$W_{ext} = \frac{GMm}{24R} = 1{,}30 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

20 *Junio 98 - 1,25 puntos*

Calcula el período de un satélite artificial que órbita la Tierra a una distancia de 10 km sobre la superficie terrestre. (Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m^2/kg^2: Masa de la Tierra: $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg. Radio de la Tierra: $R_T = 6\,370$ km).



La fuerza gravitatoria que realiza la tierra sobre el satélite será igual a la fuerza centrípeta:

$$\frac{GMm}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{R}$$

La relación entre la velocidad lineal y el período en cualquier movimiento circular uniforme viene dada por:

$$v = \frac{2\pi}{T} \cdot R \Rightarrow v^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot R^2$$

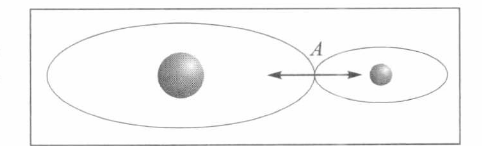
Igualando las dos ecuaciones anteriores y despejando T obtenemos:

$$\frac{GM}{R} = \frac{4\pi^2}{T^2} R^2 \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\pi^2\,(6\,370 \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^3)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}} = \boxed{5\,070\ \text{s}}$$

21 *Septiembre 98 - 1,25 puntos*

Cuando se realizan viajes a la luna la trayectoria es parecida a la figura, (tiene forma de ocho y no de elipse.). En el punto A el satélite abandona la órbita terrestre y se incorpora a la órbita lunar. ¿Qué particularidad se produce en dicho punto A?

En el punto A el vector intensidad de campo resultante del campo gravitatorio terrestre y lunar es mínimo, aproximadamente cero.



22 *Septiembre 98 - 3,75 puntos*

Un satélite artificial de masa 200 kg, describe una trayectoria circular de radio $r = 25\,000$ km. Determinar:

a) La velocidad del satélite.
b) La energía total que posee.
c) El período de revolución.

a) Si hacemos un estudio dinámico del satélite siguiendo un movimiento circular uniforme, obtenemos que la velocidad del satélite viene dada por:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \frac{\sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}}{2{,}510^{7}} = \boxed{3\,994 \text{ m/s}}$$

b) La energía total que posee el satélite será la suma de su energía cinética y potencial:

$$E = Ec + Ep = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r} = \boxed{-1{,}59 \cdot 10^{9} \text{ J}}$$

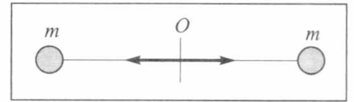
d) En un movimiento circular uniforme la relación entre la velocidad lineal y el período viene dada por:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 2{,}5 \cdot 10^{7}}{3\,994} = \boxed{39\,328 \text{ s}}$$

23

Junio 99 - 1,25 puntos

Calcular el valor del campo y del potencial gravitatorio creado por dos masas puntuales iguales y separadas 1 m entre sí, en el punto medio de la recta que une las dos masas. Expresa el resultado en función de G y m.



Como $\vec{g}_1$ y $\vec{g}_2$ tienen el mismo módulo y dirección pero de sentidos opuestos, aplicando el principio de superposición

$$\boxed{\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 0}$$

El potencial en el punto medio vendrá dado por:

$$V = V_1 + V_2 = -\frac{Gm}{r_1} - \frac{Gm}{r_2} = -\frac{2Gm}{r} = -\frac{2Gm}{0{,}5} = \boxed{-4Gm}$$

24

Septiembre 99 1,25 puntos

Calcula el mínimo trabajo que hay que realizar para elevar un satélite artificial de 500 kg de masa desde la superficie de la tierra hasta una altura de $h = R_T/5$. Suponemos que no hay variación de energía cinética y despreciamos el rozamiento. (Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2; Masa de la Tierra: $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; Radio de la Tierra: $R_T = 6\,370$ km).

Al ser el campo gravitatorio un campo conservativo, suponiendo que no hay variación de energía cinética y despreciando el rozamiento del aire, el trabajo realizado para ele-

var el satélite artificial desde la tierra hasta una altura h, se puede calcular hallando la variación de energía potencial entre esos dos puntos.

$$W_{ext} = Ep_B - Ep_A = -\frac{GMm}{R_T + \frac{R_T}{5}} - \left(-\frac{GMm}{R_T}\right) = \frac{6GMm - 5GMm}{6R_T} = \frac{GMm}{6R_T}$$

Sustituyendo los datos indicados en el problema, obtenemos:

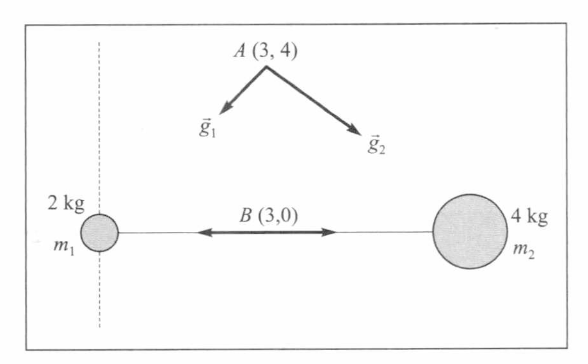
$$W_{ext} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 500}{6 \cdot 6{,}37 \cdot 10^{6}} = \boxed{5{,}24 \cdot 10^{9}\ \text{J}}$$

25 *Septiembre 99 - 3,75 puntos*

Dadas 2 esferas de masas 2 kg y 4 kg situadas, respectivamente, en los puntos (0, 0) y (6, 0) de un sistema de coordenadas cartesianas, representado en metros. Calcular:

a) La intensidad del campo gravitatorio, debido a esas masas, en los puntos (3, 4) y (3, 0).
b) El trabajo necesario para transportar otra esfera de masa 2 kg desde el punto (3, 4) al punto (3, 0). (Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²).

Dibujamos el diagrama de fuerzas.



a) Calculamos la intensidad de campo creado por cada una de las masas en el punto (3, 4)

$$\vec{g}_1 = -\frac{GM_1}{r_1^2} \cdot \frac{\vec{r}_1}{r_1} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2}{25}\left(\frac{3\vec{i}}{5} + \frac{4\vec{j}}{5}\right) = -3{,}2 \cdot 10^{-12}\vec{i} - 4{,}3 \cdot 10^{-12}\vec{j}\ \text{N/kg}$$

$$\vec{g}_2 = -\frac{GM_2}{r_2^2} \cdot \frac{\vec{r}_2}{r_2} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 4}{25}\left(\frac{-3\vec{i}}{5} + \frac{4\vec{j}}{5}\right) = -6{,}4 \cdot 10^{-12}\vec{i} - 8{,}5 \cdot 10^{-12}\vec{j}\ \text{N/kg}$$

Aplicando el principio de superposición:

$$\boxed{\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 3{,}2 \cdot 10^{-12}\vec{i} - 12{,}8 \cdot 10^{-12}\vec{j}\ \text{N/kg}}$$

La intensidad de campo en el punto (3, 0) la hallamos de forma similar a la calculada anteriormente:

$$\vec{g}_1\,(3,0) = -\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 2}{9}\,(\vec{i}\,) = -1{,}5\cdot 10^{-11}\,\vec{i}\ \text{N/kg}$$

$$\vec{g}_2\,(3,0) = -\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 4}{9}\,(-\vec{i}\,) = -3{,}0\cdot 10^{-11}\,\vec{i}\ \text{N/kg}$$

$$\vec{g}\,(3,0) = \vec{g}_1\,(3,0) + \vec{g}_2\,(3,0) = \boxed{1{,}5\cdot 10^{-11}\,\vec{i}\ \text{N/kg}}$$

b) Al ser el campo gravitatorio un campo conservativo, el trabajo, puede ser calculado mediante la variación de la energía potencial entre los dos puntos que nos dan.

$$Ep_A = -\frac{GM_1m}{r_1} - \frac{GM_2m}{r_2} = -Gm\left(\frac{M_1}{r_1} + \frac{M_2}{r_2}\right) = -1{,}3\cdot 10^{-10}\left(\frac{6}{5}\right) = -1{,}6\cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

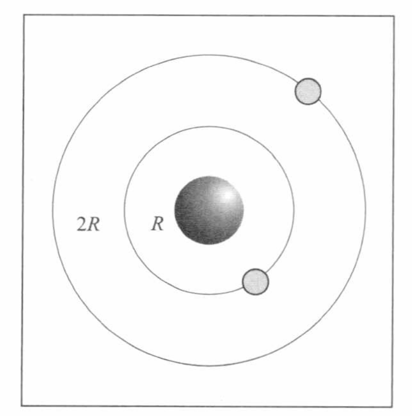
$$Ep_B = -\frac{GM_2m}{r_1'} - \frac{GM_2m}{r_2'} = -Gm\left(\frac{M_1}{r_1'} + \frac{M_2}{r_2'}\right) = -1{,}3\cdot 10^{-10}\left(\frac{6}{3}\right) = -2{,}7\cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

$$\boxed{W_{ext} = Ep_B - Ep_A = -1{,}1\cdot 10^{-10}\ \text{J}}$$

26

Junio 2000 - 1,25 puntos

Dos satélites de igual masa están situados en órbitas de radios R y $2R$ respectivamente. ¿Cuál de los dos tiene más velocidad? Si las masas fueran distintas, influirían en sus velocidades? Justifica las respuestas.



Sabiendo que sobre cada satélite la única fuerza que actúa es la gravitatoria y aplicando la 2ª ley de Newton:

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

Despejando v de la ecuación anterior obtenemos:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Si los dos satélites tienen igual o distinta masa, podemos deducir que *a mayor radio, menor velocidad lineal tendrá.*

27 *Junio 2000 - 1,25 puntos*

¿Cuál sería el valor de la intensidad del campo gravitatorio terrestre, si aumenta el radio de la Tierra al doble de su valor, conservándose su masa? $g_0 = 9{,}8$ N/kg.

El valor de la intensidad de campo gravitatorio terrestre en un punto de su superficie viene dado por:

$$g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2} = 9{,}8 \text{ N/kg}$$

Si su radio aumenta al doble, manteniéndose constante su masa:

$$g = \frac{GM_T}{(2R_T)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{GM_T}{R_T^2} = \frac{g_0}{4} \text{ N/kg}$$

La gravedad sería cuatro veces más pequeña.

28 *Septiembre 2000 - 1,25 puntos*

¿Qué trabajo tendríamos que hacer para trasladar una masa M, dentro del campo gravitatorio terrestre, desde un punto A a otro B que están a la misma distancia del centro de la tierra? ¿Qué forma tendrán las superficies equipotenciales del campo gravitatorio terrestre? Justifica la respuesta.

a) Suponiendo que la masa M se traslada con velocidad constante entre los dos puntos A y B

$$W = \Delta Ep = M\,(V_B - V_A) \qquad (1)$$

Como:

$$V = -G\,\frac{M_T}{r} \qquad \text{si} \qquad r_B = r_A \;\Rightarrow\; V_B = V_A$$

Por tanto la expresión (1) quedaría:

$$\boxed{W_A^B = 0 \text{ J}}$$

No habría que hacer ningún trabajo, ya que la masa M se movería en una superficie equipotencial.

b) Como $V = -G \cdot M_T/r$, todos los puntos que equidisten del centro de la tierra (que tengan igual "r"), tendrán igual potencial y constituirán una superficie equipotencial. Por tanto cualquier superficie esférica de centro el centro de la Tierra será una superficie equipotencial y *todas las superficies equipotenciales constituirán un conjunto de superficies esféricas concéntricas.*

29 *Septiembre 1,25 puntos*

Si la masa de un cuerpo es de 10 kg. ¿Cuánto pesaría a 20 000 m de altura sobre el nivel del mar? (Datos: $g_0 = 9{,}8$ N/kg, $R_T = 6\,370$ km).

La gravedad en un punto situado a una altura *h* sobre la superficie de la tierra la podemos calcular mediante la expresión matemática;

$$g = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2} = \frac{g_0 \cdot R_T^2}{(R_T + h)^2} = 9{,}74 \text{ N/kg}$$

Y por tanto:

$$\boxed{p = m \cdot g = 97{,}4 \text{ N}}$$

TEMA 4

CAMPO ELÉCTRICO

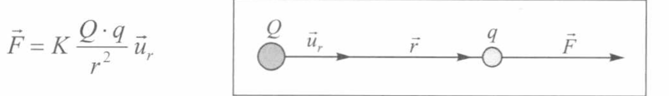
RESUMEN TEÓRICO DEL TEMA

1. Interacción electrostática. Ley de Coulomb

El valor de la fuerza con que se atraen o se repelen dos cargas puntuales en reposo, es directamente proporcional al producto de dichas cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

a) Para dos cargas puntuales Q y q, la fuerza que la primera ejerce sobre la segunda se puede expresar de la forma;

$$\vec{F} = K\,\frac{Q \cdot q}{r^2}\,\vec{u}_r$$



La unidad de carga utilizada en el S.I. es el culombio que se define como la carga que situada frente a otra igual a la distancia de 1 m la repele con una fuerza de 9×10^9 N.

Luego se toma para K el valor de $9 \cdot 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$

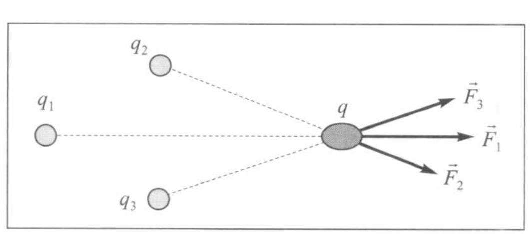
También se suele expresar de la forma $K = 1/4\pi\varepsilon_0$ siendo ε_0 una constante universal conocida como constante dieléctrica del vacío o permitividad del vacío.

b) **Principio de superposición**:

Si una carga está sometida simultáneamente a varias fuerzas indepedientes, la fuerza resultante se obtiene sumando vectorialmente dichas fuerzas.

Por ejemplo supongamos tres cargas q_1, q_2, y q_3 de la figura. La fuerza resultante sobre q debida a las cargas 1, 2 y 3 es:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$



2. Campo eléctrico

Se dice que existe un campo eléctrico en una región del espacio si una carga de prueba en reposo q, colocada en un punto de esa región, experimenta una fuerza eléctrica.

Se considera que la dirección del campo en un punto coincide con la dirección de la fuerza que éste ejerce sobre *una carga positiva de prueba* colocada en ese punto.

El campo eléctrico de una carga puntual es radial o central.

Un campo eléctrico queda determinado por estos tres elementos:

- **Intensidad** en cada uno de sus puntos.
- **Líneas de fuerza** o línea de campo.
- **Potencial** en cada uno de sus puntos.

3. Intensidad de campo eléctrico

Se define vector campo $\vec{E}$ o intensidad de campo eléctrico en cualquier punto como la fuerza eléctrica $\vec{F}$ que actúa sobre una unidad de carga de prueba positiva colocada en ese punto.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \qquad \text{se mide en N/C}$$

Cuando un campo tiene la misma intensidad, la misma dirección y el mismo sentido en todos sus puntos se dice que es un campo uniforme. Es el caso del campo que existe entre dos láminas metálicas, planas, paralelas y muy próximas cargadas cada una de signo contrario.

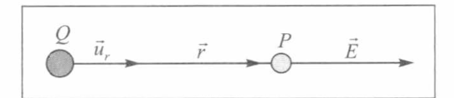
De la definición de intensidad de campo se deduce:

$$\vec{F} = \vec{E} \cdot q$$

Que nos permite calcular la fuerza que actúa sobre cualquier carga colocada en un punto, conocida la intensidad del campo en ese punto y el valor de la carga.

a) **Intensidad de Campo creado por una carga puntual**:

Supongamos la carga Q en reposo y aislada. Queremos hallar el campo creado por esa carga en un punto P que dista r de ella.



Si sustituimos el valor de la fuerza, dado por la ley de Coulomb, en la fórmula de la intensidad del campo tenemos:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{K \frac{Q \cdot q}{r^2} \vec{e}_r}{q} = K \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$$

Esta expresión confirma que el campo eléctrico disminuye con el cuadrado de la distancia. Es un campo de fuerzas centrales y, por tanto, conservativo.

b) **Intensidad de campo creado por un sistema de cargas puntuales**:

Para hallar, en un punto, el campo creado por un conjunto de cargas aisladas Q_1, Q_2, Q_3, ..., aplicamos el principio de superposición y obtenemos que el campo resultante es la suma vectorial de los campos creados por cada una de las cargas.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \ldots$$

4. Potencial eléctrico. Energía potencial

Al ser el campo eléctrico un campo conservativo podemos definir una función llamada potencial eléctrico que viene dada por la expresión:

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Si elegimos como origen de potenciales el ∞. El potencial en un punto de un campo eléctrico representa el trabajo que realizan las fuerzas del campo para trasladar la unidad de carga positiva desde dicho punto hasta el infinito.

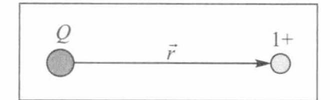
$$W_A^{\infty} = V(A) - V(\infty) = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Donde $\vec{E}$ representa la suma vectorial de todos los campos que actúan sobre la unidad de carga positiva

a) **Potencial eléctrico creado por una carga puntual**:

Para el caso de una carga puntual Q, la expresión anterior toma el valor:

$$V = -\int \frac{KQ}{r^2} \vec{e}_r d\vec{r} = -\int \frac{KQ}{r^2} dr = -KQ\left(\frac{-1}{r}\right) = \frac{KQ}{r}$$



b) **Potencial en un punto del campo creado por un sistema de cargas puntuales**:

El potencial de dos o más cargas puntuales, se obtiene aplicando el principio de superposición; es decir, el potencial en un punto del campo creado por varias cargas puntuales es la suma algebraica de los potenciales debidos a cada una de las cargas puntuales:

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$$

5. Energía potencial. Energía potencial asociada a un sistema de cargas puntuales

Se define energía potencial de una carga q en punto, como el trabajo realizado por las fuerzas del campo para trasladar la carga q desde el infinito hasta el punto.

$$Ep = qV$$

a) **Energía potencial asociada a un sistema de cargas puntuales**:

Si V_1 es el potencial eléctrico debido a la carga Q_1 en un punto P, entonces el trabajo necesario para llevar una carga Q_2 desde el infinito hasta el punto P es $V_1 \cdot Q_2$. Por definición este trabajo es igual a la energía potencial del sistema de dos cargas puntuales, cuando están separadas una distancia r.

Para un sistema de tres cargas puntuales:

$$Ep = Q_2 \cdot V_1 + Q_3\,(V_{31} + V_{32})$$

b) **Trabajo eléctrico**

Al ser el campo eléctrico un campo conservativo, la diferencia de energía potencial eléctrica de una carga entre un punto A y otro punto B es igual al trabajo realizado por el campo eléctrico para trasladar dicha carga de A a B.

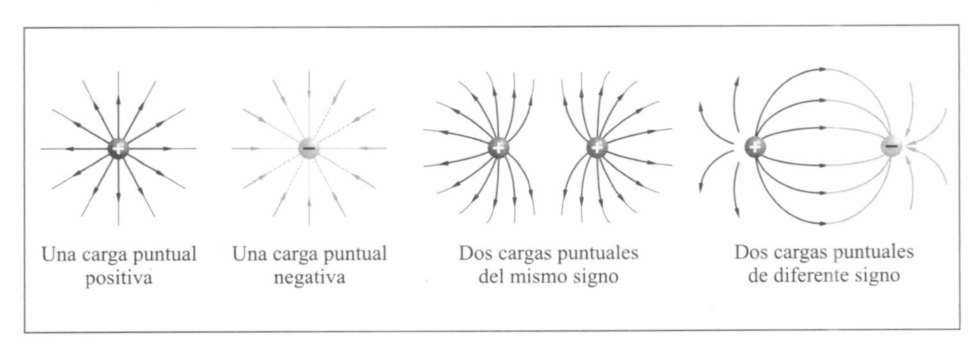
$$Ep_A - Ep_B = W_A^B \text{ campo}$$

6. Líneas del campo eléctrico y superficies equipotenciales

Por tratarse de un campo de fuerzas, el campo eléctrico se representa gráficamente mediante las llamadas líneas de campo o líneas de fuerza, las cuales tienen la misma dirección que el vector campo en cada punto. Estas líneas imaginarias tienen las siguientes propiedades:

1. Son abiertas, salen siempre de cargas positivas o del infinito y terminan en el infinito o en las cargas negativas.
2. El número de líneas de que salgan de una carga positiva o entren en una carga negativa debe ser proporcional a dicha carga.
3. Las líneas de campo no pueden cortarse. De lo contrario, en el punto de corte existirían dos vectores campo distintos.
4. Si el campo es uniforme, las líneas de campo son rectas paralelas.

Si en un campo eléctrico se abandona una carga, ésta se moverá bajo la acción del campo siguiendo una línea de campo. Por ello las líneas de campo son trayectorias que sigue una carga abandonada en reposo en el interior del campo.



6.1. Superficies equipotenciales

Reciben este nombre los lugares geométricos de todos los puntos de un campo eléctrico que tienen el mismo potencial.

Propiedades:

1. El trabajo realizado al trasladar una carga desde un punto a otro de una superficie equipotencial es nulo.

$$W = q\,(V_a - V_b) = q \cdot 0 = 0$$

2. Las superficies equipotenciales y las líneas de fuerza se cortan perpendicularmente, puesto que si $W = 0$, el ángulo que forman fuerza y desplazamiento habrá de ser 90°.

3. Las líneas de campo se dirigen hacia los potenciales decrecientes:

El campo eléctrico $\vec{E}$ y el potencial V están relacionados mediante la expresión:

$$dV = -\,\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

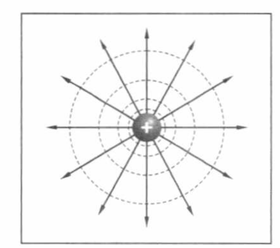
Si el campo eléctrico tiene una sola componente, E_x, entonces:

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = E_x \cdot dx \;;$$

en consecuencia, la ecuación del potencial toma la forma:

$$E_x = -\,dV/dx$$

Si el campo eléctrico es uniforme: $E_x = -\,\Delta V/\Delta x$



Líneas de campo y superficies equipotenciales de una carga positiva.

7. Flujo de un campo eléctrico. Teorema de Gauss

El **flujo del campo eléctrico** o **flujo eléctrico**, Φ, a través de una superficie es una medida del número de líneas de campo que atraviesan dicha superficie.

El flujo total a través de una superficie cerrada es el flujo neto, que resulta proporcional al número neto de líneas de fuerza que salen de la superficie.

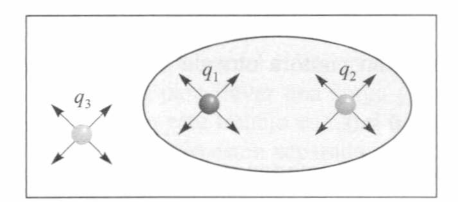
$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

TEOREMA DE GAUSS: El **flujo eléctrico** a través de una **superficie cerrada** S es proporcional a la carga eléctrica neta Q que encierra la superficie.

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = 4\pi K Q$$

Así por ejemplo, si existen dos cargas q_1 y q_2, encerradas por la superficie S y una exterior, q_3, el flujo total a través de la superficie resulta:

$$\phi = 4\pi K q_1 + 4\pi K q_2 = 4\pi K (q_1 + q_2) = 4\pi K Q$$



Ya que, como vemos, para la carga q_3 entran en la superficie el mismo número de líneas que salen de ella y, por tanto, el flujo neto correspondiente a esta carga es nulo.

Podemos enunciar el teorema de Gauss para cargas como:

El flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada S, es:

$$\phi = 4\pi K Q_{int}$$

siendo Q_{int} la carga total encerrada en el interior de la superficie.

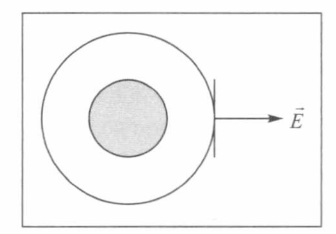
8. Aplicaciones del teorema de Gauss

El teorema de Gauss facilita la labor de determinar el campo creado por una distribución cualesquiera de cargas, evitando, en ocasiones el recurso al cálculo integral.

8.1. Campo eléctrico creado por una esfera uniformemente cargada

Supongamos una esfera con carga uniformemente repartida y queremos hallar la intensidad de su campo en un punto *A* que dista *r* del centro de la esfera.

Trazamos por el punto *A* una superficie gaussiana de manera que en cualquier punto de ella el campo sea constante. La superficie que cumple esta condición es una superficie esférica concéntrica a la esfera dada. Por simetría el campo es radial.



Aplicando el teorema de Gauss se tiene:

$$\phi = \int_S E \cdot ds = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E \int_S ds = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} = K\frac{Q}{r^2}$$

Obsérvese que este resultado es idéntico al encontrado por la ley de Coulomb para una carga puntual. *El campo de una carga Q distribuida uniformemente por una esfera es el mismo que el de una carga puntual del mismo valor colocada en el centro de la esfera.*

CUESTIONES Y EJERCICIOS DE CAMPO ELÉCTRICO

1. El potencial eléctrico es constante en cierta región del espacio. ¿El campo eléctrico es cero o distinto de cero en esa región? Justifica tu respuesta.

2. En el centro de un cuadrado de lado $a = 1$ m se coloca una carga de valor $Q = 10^{-8}$ C. Calcula:

a) El valor del potencial en un vértice cualquiera. (Solución: 127,3 V)

b) El trabajo que ha de realizar un agente externo, contra el campo eléctrico creado por *Q*, para trasladar, sin aceleración, una carga prueba $q = 10^{-9}$ C entre dos vértices cualesquiera. (Solución: 0 V)

3. Define el flujo del campo eléctrico. Coméntalo brevemente.

4. Tenemos dos esferas idénticas muy pequeñas. Una tiene una carga $q_1 = 5\ \mu C$ y la otra tiene una $q_2 = 10\ \mu C$ (recuerda que $1\ \mu C = 10^{-6}$ C). Las colocamos en las posiciones (0, 0) m y (3, 3) m, respectivamente. Suponiendo que el medio que rodea a las dos esferas es el aire ($K = 9 \cdot 10^9\ N \cdot m^2/C^2$) calcular:

a) La posición sobre la recta que contiene q_1 y q_2 en la que el campo eléctrico es nulo. (Solución: $x = r \cos 45° = -3 + 3\sqrt{2}$ m; $y = r \operatorname{sen} 45° = -3 + 3\sqrt{2}$ m)

b) El trabajo necesario para trasladar una carga $q_3 = -4\ \mu C$, desde el punto (2, 0) m hasta el (6, 0) m. (Solución: 0,0890 J)

5. Si el campo eléctrico es cero en una zona del espacio, ¿también será cero el potencial en esa zona? Razona tu respuesta.

6. Tenemos una partícula de prueba con carga $q_1 = -6 \cdot 10^{-9}$ C y masa $m = 0{,}22$ kg. La liberamos desde el reposo a una distancia de 78 mm de una partícula fija que tiene una carga $q_2 = 55 \cdot 10^{-9}$ C. Suponiendo que la fuerza eléctrica es la única fuerza que actúa sobre la carga de prueba, calcular la energía cinética cuando se encuentre a una distancia de 32 mm de la partícula fija. (Dato: $K = 9 \cdot 10^9\ Nm^2/C^2$). (Solución: $5{,}47 \cdot 10^{-5}$ J)

7. Sabemos que el potencial eléctrico en un punto cualquiera del eje X viene dado, en el Sistema Internacional, por la siguiente expresión: $V(x) = x^2 - 10x + 7$. Calcula la posición de equilibrio estable (aquella en la que el campo eléctrico es nulo) sobre el eje X. (Solución: $x = 5$ m)

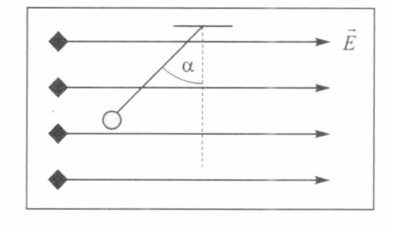
8. Una carga Q de 10^{-6} C se encuentra colocada, en el origen de coordenadas. Calcula:

a) El potencial creado por Q a una distancia de 3 m de ella. Supóngase, como es habitual, que tomamos el origen de potencial en el infinito. (Solución: 3 000 V)

b) El trabajo que hay que hacer, en contra del campo creado por Q, para traer, sin aceleración, una carga $q = 10^{-7}$ C desde el infinito hasta colocarla a 3 m del origen de coordenadas. (Solución: $-3 \cdot 10^{-4}$ J)

9. Enuncia brevemente la ley de Gauss para el campo eléctrico y aplícala a un ejemplo sencillo en el que aparezcan tres cargas puntuales.

10. Una pequeña esfera de masa $m = 0{,}5$ g y carga q, colgada de una cuerda de masa despreciable, está colocada dentro de un campo eléctrico de 400 N/C, tal y como muestra la figura.



a) Sabiendo que en la posición de equilibrio el ángulo que forma la cuerda con la vertical es 15°, halla el valor de la carga q de la esfera. (Solución: $q = 3{,}28 \cdot 10^{-6}$ C)

b) Si duplicamos el campo eléctrico, calcula el nuevo ángulo de equilibrio? (Solución: 28,18°)

(Date cuenta que además del campo eléctrico, también actúa el campo gravitatorio terrestre. Tómese $g = 9{,}8$ m/s).

11. Dos cargas se repelen, la una a la otra, con una fuerza de 10 N cuando están separadas 10 cm. ¿Cuánto valdrá la fuerza de repulsión entre ellas cuando estén separadas 2 cm?

a) 50 N.
b) 250 N.
c) 2N.
d) 10 N.

Elige la opción que creas correcta y razónala brevemente. (Solución: b))

12. a) Cuánto debe valer la carga Q, colocada en el vértice superior del triángulo equilátero de la figura, para que el potencial eléctrico total creado por las tres cargas sea nulo en el punto medio de su altura? (Solución: $-1{,}528 \cdot 10^{-5}$ V)
b) Si duplicamos el valor de esa carga, cuánto vale entonces el potencial eléctrico en dicho punto? (Solución: –119 168 V)

(Datos: $a = 2$ m, $q = 7{,}64 \cdot 10^{-6}$ C).

13. Halla el valor de Q en función de q, para que el potencial eléctrico generado por estas cuatro cargas sea nulo en el origen de coordenadas. (Solución: $Q = 2$ q)

14. En el centro de un cubo cuyas aristas miden 2 m, colocamos una carga puntual de $3 \cdot 10^{-9}$ C.

a) Calcula el flujo del campo eléctrico producido por dicha carga a través de la superficie delimitada por dicho cubo. (Solución: $339{,}29 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-1}$)
b) ¿Cuánto vale el flujo a través de una de las caras del cubo? (Solución: $56{,}55 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-1}$)
c) Si la carga no estuviera en el centro, ¿las respuestas a los apartados a y b anteriores serían las mismas? Explícalo sin hacer cálculos.

15. Elige la opción que creas correcta y razónala brevemente.

Dos cargas iguales separadas una cierta distancia se atraen mutuamente con una fuerza de 10^{-5} N. Cuando la separación es de 4 mm, la fuerza entre ellas es de $2{,}5 \cdot 10^{-6}$ N La separación inicial de las cargas es de:

a) 1 mm
b) 2 mm
c) 4 mm
d) 8 mm

(Solución b))

16. Tenemos dos esferas metálicas de radios 3 y 6 cm. La mayor está cargada hasta que el potencial en su superficie es de 3 000 V. La pequeña tiene un potencial en su centro de 12 000 V. Las separamos una distancia de 2 m que podemos considerar muy grande comparada con sus radios.

a) Calcula la fuerza con la que se repelen las dos esferas.
b) A continuación las unimos mediante un cable metálico muy fino. Transcurrido un cierto tiempo desconectamos el cable. Calcula ahora la nueva fuerza con la que se repelen las dos esferas. (Solución: $F_1 = F_2 = 1{,}8 \cdot 10^{-6}$ N)

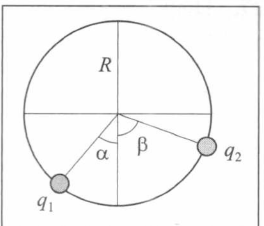
17. En el centro de un cuadrado se coloca una carga negativa $-Q$. En los vértices tenemos cuatro cargas iguales de valor $Q = 3 \cdot 10^{-3}$ C. Calcula el valor de Q si la fuerza resultante en cada vértice es nula. (Solución: $Q = -2{,}87 \cdot 10^{-3}$ C)

18. Una bola A, de masa $m = 0{,}5$ g y carga Q, está suspendida de un hilo aislante de longitud $l = 0{,}6$ m. Se le aproxima otra bola igual, B, cargada $q = 10^{-8}$ C, y el hilo se separa de la vertical hasta tomar un ángulo $\theta = 30°$. En la posición final A y B están en la misma horizontal, separadas una distancia $d = 1$ m. Determinar:

a) El valor de la carga de A. (Solución: $3{,}14 \cdot 10^{-5}$ C)
b) El valor del campo eléctrico creado por B en el punto donde está A y la fuerza que ejerce sobre A. (Solución: $2{,}83 \cdot 10^{-3}$ N; 282 600 N/C)

19. Faraday afirmó que un objeto cargado de forma esférica de radio R se comporta, desde el punto de vista eléctrico, como si toda la carga estuviera concentrada en su centro. ¿Esta es una aproximación válida sólo para distancias r muy grandes comparadas con R ($r \gg R$) o es exactamente cierta para cualquier distancia $r > R$? Razona tu respuesta.

20. La figura nos muestra dos cargas positivas fijas en una circunferencia de Radio $R = 10$ cm siendo los ángulos. $\alpha = 20°$ y $\beta = 70°$. En el centro de la circunferencia, el campo eléctrico resultante producido por las dos cargas está dirigido hacia arriba, a lo largo del radio vertical.



a) Calcula el cociente q_1/q_2.

b) Supongamos ahora que las dos cargas son iguales. Sabiendo que el potencial eléctrico en el centro es $5{,}4 \cdot 10^5$ V, calcula el valor de ambas cargas. Da el resultado en microculombios. (Solución: 2,74; 3 μC)

21. Un cascarón esférico de 2 m de radio tiene uniformemente repartida una carga de $8 \cdot 10^{-8}$ C. Calcula módulo del campo eléctrico en un punto que dista 1 m de su centro y en otro punto que dista 3 m de su centro. Comenta los resultados que obtengas. (Solución: 0 N/C; 80 V/m)

22. Trasladamos sin variación de velocidad una carga de prueba de $1 \cdot 10^{-8}$ C entre dos puntos separados 15 cm. Supongamos que ambos puntos pertenecen a la misma superficie equipotencial, la de 25 000 V, de una carga puntual colocada en el origen de coordenadas y de valor $8 \cdot 10^{-8}$ C. Calcula el trabajo que debemos realizar. (Solución: 0 J)

23. Una carga positiva $+q_1$ se coloca 3 m a la izquierda de una carga negativa $-q_2$. Las cargas tienen diferentes valores absolutos. A lo largo de la línea que contiene a las dos cargas, el *campo eléctrico* es nulo en un punto que está situado 1 m a la derecha de la carga negativa. En esa recta hay también dos puntos en los que el *potencial eléctrico* es nulo. Localiza dichos puntos dando su situación respecto de la carga negativa. (Solución: 0,18 m a la izquierda; 0,2 m a la derecha)

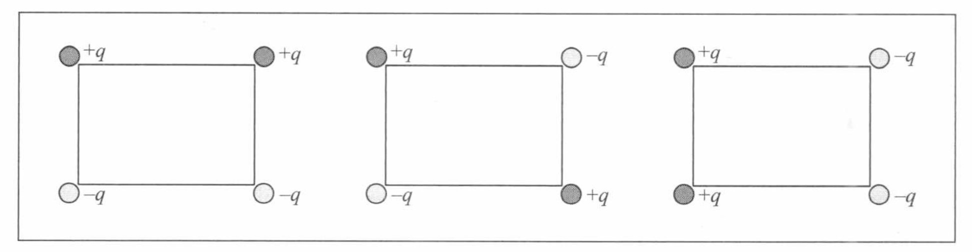
24. Un cascarón esférico de 4 m de radio tiene uniformemente repartida una carga de $2 \cdot 10^{-6}$ C. Calcula el potencial eléctrico en un punto que dista 2 m de su centro y en otro punto que dista 6 m de su centro. (Solución: 4 500 V; 3 000 V)

25. Una carga positiva, q_1, está colocada a la izquierda de una carga negativa $-q_2$. A lo largo de la recta que las une, hay dos puntos en los que el potencial total es nulo. El primer punto está entre ellas, a una distancia de 4 m a la izquierda de la carga negativa. El segundo punto está a 8 m a la derecha de la carga negativa.

a) Calcula la distancia entre las cargas. (Solución: 16 m)

b) Halla el cociente entre los valores absolutos de las cargas q_1/q_2. (Solución: 3)

26. Los tres diagramas adjuntos nos muestran cuatro cargas colocadas en los vértices de un rectángulo de tres maneras diferentes, denominadas I, II, III. Consideremos el módulo del campo eléctrico resultante en el centro *C* del rectángulo. Ordena los módulos de los campos eléctricos, poniendo el más grande el primero. Justifica la ordenación. (Solución: III; I; II)



27. Disponemos cuatro cargas de los siguientes valores $+q$, $-2q$, $-4q$, y $+2q$ en los cuatro vértices de un cuadrado de lado $2L$, centrado en el origen de coordenadas. La primera carga está en el vértice que se encuentra en el primer cuadrante, la segunda en el vértice del segundo cuadrante y así sucesivamente hasta la cuarta carga.

a) Calcula el vector fuerza total que actúa sobre la carga $+q$ debido a las otras tres. (Solución: $-1{,}35\vec{i} + 0{,}25\vec{j}$ N)

b) Calcula el vector fuerza total que actúa sobre una quinta carga Q que colocamos en el origen de coordenadas, es decir, en el centro del cuadrado. (Solución: $-0{,}0025\vec{i} - 0{,}00028\vec{j}$ N)

(Datos: $q = 2 \cdot 10^{-5}$ C; $L = 1{,}5$ m; $Q = 10^{-8}$ C)

28. Tenemos dos cargas puntuales positivas. Una de ellas, $Q = 10^{-3}$ C, se encuentra en el origen de coordenadas. La otra carga $q = 10^{-6}$ C, está muy alejada de la primera (podemos suponer que se encuentra en el infinito) y tienen una energía cinética de 5 J. Supongamos, además, que la carga q se mueve a lo largo del eje OX hacia la carga Q, la cual, mediante algún dispositivo mecánico está fija.

a) Calcula la distancia del acercamiento máximo entre ambas cargas. (Solución: 1,8 m)

b) Calcula la fuerza de repulsión entre ellas y la energía potencial eléctrica, ambas en el punto de máximo acercamiento. (Solución: 2,8 N; 5 J)

29. Estamos midiendo el flujo eléctrico que atraviesa una superficie cerrada y obtenemos un valor nulo. ¿Podemos deducir, con toda seguridad que no hay cargas eléctricas en el interior de dicha superficie? Razona tu respuesta.

30. Si juntamos dos cargas q_1 y q_2, obtenemos una carga total de $9 \cdot 10^{-6}$ C. Cuando separamos q_1 y q_2 hasta una distancia de 3 m, la fuerza que ejerce sobre otra vale $8 \cdot 10^{-3}$ N. Calcula el valor de q_1 y q_2.

a) Si ambas son positivas. (Solución: $1 \cdot 10^{-6}$ y $8 \cdot 10^{-6}$ C)

b) Si q_1 es positiva y q_2 es negativa. (Solución: $9{,}8 \cdot 10^{-6}$ y $-0{,}8 \cdot 10^{-6}$ C)

31. Si queremos mover una partícula cargada entre dos puntos cuya diferencia de potencial eléctrica es de 25 V, necesitamos realizar un trabajo de $7{,}5 \cdot 10^{-3}$ J. Calcula el valor absoluto de dicha carga. (Solución: $3 \cdot 10^{-4}$ C)

32. Consideremos las superficies equipotenciales producidas por una carga puntual de valor $q = 2 \cdot 10^{-8}$ C colocada en el origen de coordenadas.

a) Haz un esquema de las superficies equipotenciales.

b) Calcula la separación entre la superficie equipotencial de 6 000 V y la de 2 000 V. (Solución: 0,06 m)

c) Calcula el trabajo que tiene que realizar un agente externo para mover una carga de prueba $q_0 = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ C desde la superficie equipotencial de 6 000 V hasta la de 2 000 V sin variar su energía cinética. (Solución: –6 J)

33. El potencial eléctrico es constante en una cierta región del espacio. ¿Cómo será el campo eléctrico en esa misma zona? Razona la respuesta.

34. La superficie de un globo está pintada con pintura metalizada y cargada negativamente. ¿Cuál será la variación del potencial eléctrico sobre la superficie del globo a medida que este se va hinchando y aumenta por tanto su radio? (Solución: mayor)

35. Dos esferas puntuales iguales están suspendidas mediante hilos inextensibles y sin peso, de un metro de longitud cada uno, de un mismo punto. Determina la carga

eléctrica que han de poseer cada una de ellas para que cada hilo forme un ángulo de 30° con la vertical. (Datos: masa de cada esfera $m = 10$ g; $K = 9 \cdot 10^9$ N · m²/C²; $g = 9{,}8$ m/s²). (Solución: $2{,}51 \cdot 10^{-6}$ C)

36. Enuncia el teorema de Gauss. Utilizando este teorema, comprueba que una esfera cargada eléctricamente se comporta en su exterior como una carga puntual situada en su centro.

37. Una esfera metálica de 3 cm de radio cuya carga es de 5 μC se pone en contacto con otra esfera conductora de 4,5 cm de radio inicialmente descargada. Explica el proceso que tiene lugar al ponerlas en contacto y calcula la carga final de cada esfera. (Solución: 2 y 3 μC)

38. Una carga eléctrica de 4 C es llevada desde un punto, donde existe un potencial de 15 V, a otro punto cuyo potencial es de 40 V. Indica si gana o pierde energía y cuánta. (Solución: gana 100 J)

39. En los puntos A (4, 0), B (0, –4), C (–2, 0) y D (2, 0) de un sistema de coordenadas cartesianas expresadas en metros, se encuentran, respectivamente, las cargas eléctricas $q_1 = 14 \cdot 10^{-5}$ C, $q_2 = 23 \cdot 10^{-5}$ C, $q_3 = -8 \cdot 10^{-5}$ C, y $q_4 = -6 \cdot 10^{-5}$ C. Calcular:

a) La intensidad de campo eléctrico en el punto (0, 0). (Solución: $\vec{E} = -123\,750\,\vec{i} + 129\,375\,\vec{j}$ N/C)

b) El potencial eléctrico en el punto (0, 0). (Solución: $2{,}025 \cdot 10^5$ V)

c) La energía potencial eléctrica que adquiere una carga de $25 \cdot 10^{-6}$ C al situarse en ese punto. (Dato: $K = 9 \cdot 10^9$ N · m²/C²). (Solución: 5,06 J)

40. Haz la gráfica que representa la variación de la intensidad del campo eléctrico, creado por una esfera conductora de radio R y carga Q, con la distancia al centro de la esfera.

41. Dos cargas eléctricas $q_1 = 3 \cdot 10^{-6}$ C y $q_2 = 2 \cdot 10^{-6}$ C se encuentran, respectivamente, en los puntos (0, 0) y (4, 0) de un sistema de referencia medido en metros. Hallar:

a) La intensidad del campo eléctrico en el punto (0, 3). (Solución: $\vec{E} = -576\,\vec{i} + 3\,432\,\vec{j}$ N/C)

b) Un punto del plano cartesiano donde la intensidad del campo eléctrico sea nulo. (Solución: (2, 20, 0))

c) La energía potencial del sistema de cargas. (Solución: $1{,}35 \cdot 10^{-2}$ J)

CUESTIONES Y EJERCICIOS RESUELTOS DE CAMPO ELÉCTRICO

1 *Junio 92*

El potencial eléctrico es constante en cierta región del espacio. ¿El campo eléctrico es cero o distinto de cero en esa región? Justifica tu respuesta.

Teniendo en cuenta que el campo eléctrico se puede expresar como el gradiente de un potencial

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V$$

y que, para el caso unidimensional la expresión anterior quedaría como:

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dx}\vec{i}$$

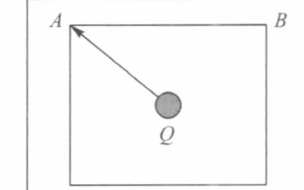
Si el potencial eléctrico es constante en una región su derivada será cero.

2 *Junio 92*

En el centro de un cuadrado de lado $a = 1$ m se coloca una carga de valor $Q = 10^{-8}$ C. Calcula:

a) El valor del potencial en un vértice cualquiera.
b) El trabajo que ha de realizar un agente externo, contra el campo eléctrico creado por Q, para trasladar, sin aceleración, una carga prueba $q = 10^{-9}$ C entre dos vértices cualesquiera.

$a = 1$ m



a) El potencial creado por una carga puntual a una distancia r viene dado por:

$$V = \frac{KQ}{r}$$

siendo r la distancia entre la carga Q y el vértice A

$$V = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-8}}{\sqrt{0{,}5^2 + 0{,}5^2}} 127{,}3 \text{ Voltios}$$

b) El trabajo realizado por fuerzas externas al campo para llevar la carga q del vértice A al punto B vendrá dado por:

$$W_{\text{ext}} = q\,(V_B - V_A)$$

Como $V_A = V_B = 127{,}3$ voltios, ya que los puntos A y B están a igual distancia de la carga Q.

$$W_{\text{ext}} = q \cdot 0 = 0 \text{ J}$$

3 *Septiembre 92*

Define el flujo del campo eléctrico. Coméntalo brevemente.

Dado un campo vectorial de intensidad $\vec{E}$ y una superficie elemental $d\vec{S}$ se llama flujo elemental del campo a través de dicha superficie al producto escalar:

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Si la superficie es finita, se divide en trozos infinitesimales dS y se calcula el flujo mediante la integral extendida a toda la superficie:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Si la superficie es cerrada, se indica así:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

El flujo a través de una superficie abierta es proporcional al número de líneas de campo que la atraviesan.

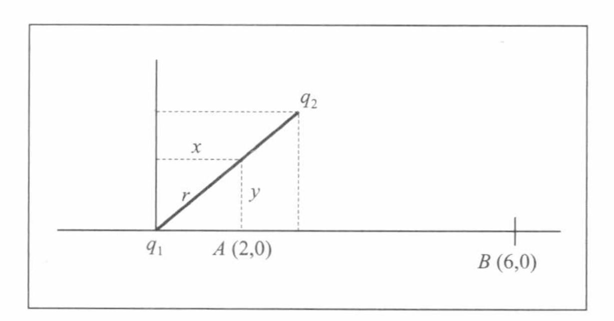
El flujo a través de una superficie cerrada es proporcional al numero de líneas salientes menos el número de líneas entrantes.

4 *Septiembre 92*

Tenemos dos esferas idénticas muy pequeñas. Una tiene una carga $q_1 = 5\ \mu C$ y la otra tiene una $q_2 = 10\ \mu C$ (recuerda que $1\ \mu C = 10^{-6}$ C). Las colocamos en las posiciones (0, 0) m y (3, 3) m, respectivamente. Suponiendo que el medio que rodea a las dos esferas es el aire ($K = 9 \cdot 10^9\ N \cdot m^2/C^2$) calcular:

a) La posición sobre la recta que contiene q_1 y q_2 en la que el campo eléctrico es nulo.

b) El trabajo necesario para trasladar una carga $q_3 = -4\ \mu C$, desde el punto (2, 0) m hasta el (6, 0) m.



a) La posición sobre la recta donde el campo eléctrico es nulo, debe cumplir que el módulo del campo creado por q_1 debe ser igual al producido por q_2.

$$E_1 = E_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{Kq_1}{r^2} = \frac{Kq_2}{\left(\sqrt{18} - r\right)^2}$$

siendo $\sqrt{18}$ la distancia entre q_1 y q_2.

Resolviendo la ecuación anterior obtenemos:

$$5\left(18 + r^2 - 2\sqrt{18}\, r\right) = 10r^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 + 2\sqrt{18} - 18 = 0$$

$$r = \frac{-2\sqrt{18} \pm \sqrt{72 + 72}}{2} = -\sqrt{18} + 6 = -3\sqrt{2} + 6 \text{ m}$$

Al ser el ángulo que forma la recta que une q_1 y q_2 con el eje de abcisas de 45°, las coordenadas de este punto serán:

$$\boxed{x = r\cos 45^\circ = -3 + 3\sqrt{2}\text{ m}}\ ; \qquad \boxed{y = r\,sen\,45^\circ = -3 + 3\sqrt{2}\text{ m}}$$

b) Calculamos el potencial creado por un sistema de dos cargas puntuales en cada uno de los puntos:

$$V(A) = \frac{Kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} = \frac{9\cdot 10^9\cdot 5\cdot 10^{-6}}{2} + \frac{9\cdot 10^9\cdot 10\cdot 10^{-6}}{\sqrt{(3-2)^2+(3-0)^2}} = 50\,960{,}5\text{ V}$$

$$V(B) = \frac{Kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} = \frac{9\cdot 10^9\cdot 5\cdot 10^{-6}}{2} + \frac{9\cdot 10^9\cdot 10\cdot 10^{-6}}{\sqrt{(3-6)^2+(3-0)^2}} = 28\,713{,}2\text{ V}$$

El trabajo realizado por un agente externo para trasladar la carga q_3 del punto A al punto B al ser el campo eléctrico un campo conservativo, vendrá dado por:

$$\boxed{W_{ext} = q_3\,(V(B) - V(A)) = -4\cdot 10^{-6}\,(28\,713{,}2 - 50\,960{,}5) = 0{,}0890\text{ J}}$$

5 — *Junio 93*

Si el campo eléctrico es cero en una zona del espacio, ¿también será cero el potencial en esa zona? Razona tu respuesta.

Si tenemos en cuenta que el potencial en una cierta zona, solamente depende de una dimensión.

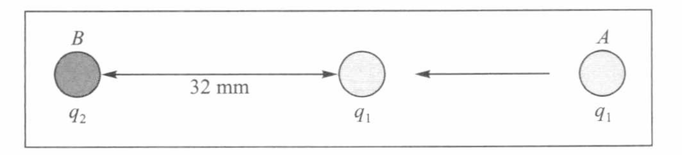
El campo eléctrico se puede expresar de la forma:

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dx}\vec{i}$$

de donde se deduce que *si el campo eléctrico es cero el potencial será constante.*

6 — *Junio 93*

Tenemos una partícula de prueba con carga $q_1 = -6\cdot 10^{-9}$ C y masa $m = 0{,}22$ kg. La liberamos desde el reposo a una distancia de 78 mm de una partícula fija que tiene una carga $q_2 = 55\cdot 10^{-9}$ C. Suponiendo que la fuerza eléctrica es la única fuerza que actúa sobre la carga de prueba, calcular la energía cinética cuando se encuentre a una distancia de 32 mm de la partícula fija. (Dato: $K = 9\cdot 10^9$ Nm²/C²).



Al ser el campo eléctrico un campo conservativo, se cumple el principio de conservación de la energía mecánica:

$$Ec_A + Ep_A = Ec_B + Ep_B$$

Si inicialmente la carga q_1 se encuentra en reposo la energía cinética en el punto A será igual a cero y la energía cinética en el punto B:

$$Ec_B = Ep_A - Ep_B = q_1 (V_A - V_B) =$$

$$= -6 \cdot 10^{-9} \left(\frac{9 \cdot 10^9 \cdot 55 \cdot 10^{-9}}{78 \cdot 10^{-3}} - \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 55 \cdot 10^{-9}}{32 \cdot 10^{-3}} \right)$$

$$\boxed{Ec_B = -6 \cdot 10^{-9} (6\,346{,}2 - 15\,468{,}7) = 5{,}47 \cdot 10^{-5} \text{ J}}$$

7 *Septiembre 93*

Sabemos que el potencial eléctrico en un punto cualquiera del eje X viene dado, en el Sistema Internacional, por la siguiente expresión: $V(x) = x^2 - 10x + 7$. Calcula la posición de equilibrio estable (aquella en la que el campo eléctrico es nulo) sobre el eje X.

El módulo del campo eléctrico es igual a la máxima variación del potencial por unidad de longitud cambiada de signo:

$$E = -\frac{dV}{dx} = 2x - 10$$

La posición de equilibrio estable será aquella en la que el campo eléctrico es nulo:

$$\boxed{2x - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 5 \text{ m}}$$

8 *Septiembre 93*

Una carga Q de 10^{-6} C se encuentra colocada, en el origen de coordenadas. Calcula:

a) El potencial creado por Q a una distancia de 3 m de ella. Supóngase, como es habitual, que tomamos el origen de potencial en el infinito.
b) El trabajo que hay que hacer, en contra del campo creado por Q, para traer, sin aceleración, una carga $q = 10^{-7}$ C desde el infinito hasta colocarla a 3 m del origen de coordenadas.

El potencial creado por una carga puntual a una distancia r de dicha carga, tomando como origen de potenciales el infinito viene dado por:

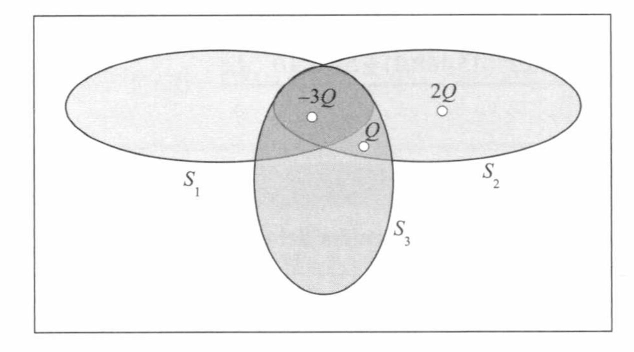
$$\boxed{V = \frac{KQ}{r} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6}}{3} = 3\,000 \text{ voltios}}$$

Como el campo eléctrico es conservativo, el trabajo realizado contra la fuerzas del campo, lo podemos calcular mediante la variación de su energía potencial.

$$W_{ext} = Ep_B - Ep_A = q\,(V_B - V_A) = 10^{-7}\,(0 - 3\,000) = -3 \cdot 10^{-4}\ \text{J}$$

9 *Junio 94*

Enuncia brevemente la ley de Gauss para el campo eléctrico y aplícala a un ejemplo sencillo en el que aparezcan tres cargas puntuales.



El flujo del campo eléctrico creado por una distribución cualquiera de carga, a través de una superficie cerrada, viene dado por la carga encerrada en el interior de la superficie dividida por la permitividad dieléctrica del medio.

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_e}{\varepsilon_0}$$

Lo aplicamos a las superficies cerradas S_1, S_2, S_3

Para S_1: $\Phi_1 = \dfrac{-3Q}{\varepsilon_0}$

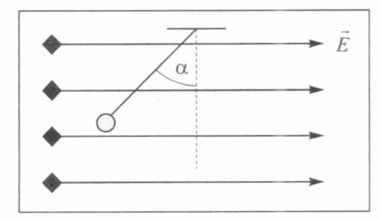
Para S_2: $\Phi_2 = \dfrac{-3Q + Q + 2Q}{\varepsilon_0} = 0$

Para S_3: $\Phi_3 = \dfrac{-3Q + Q}{\varepsilon_0} = \dfrac{-2Q}{\varepsilon_0}$

10 *Junio 94*

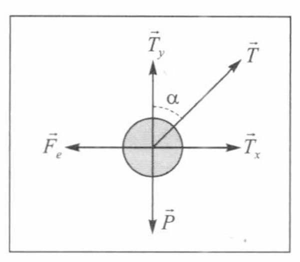
Una pequeña esfera de masa $m = 0{,}5$ g y carga q, colgada de una cuerda de masa despreciable, está colocada dentro de un campo eléctrico de 400 N/C, tal y como muestra la figura.

a) Sabiendo que en la posición de equilibrio el ángulo que forma la cuerda con la vertical es 15°, halla el valor de la carga q de la esfera.
b) Si duplicamos el campo eléctrico, calcula el nuevo ángulo de equilibrio?



(Date cuenta que además del campo eléctrico, también actúa el campo gravitatorio terrestre. Tómese $g = 9{,}8$ m/s^2).

Realizamos un diagrama de fuerzas sobre la masa m:



a) Aplicando la 2ª ley de Newton a la masa m:

$$p = T_y \Rightarrow mg = T\cos 15°$$

$$F_e = T_x \Rightarrow qE = T \text{ sen } 15°$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones de dos incógnitas obtenemos para el valor de q:

$$\text{tag } 15° = \frac{qE}{mg} \Rightarrow \boxed{q = \frac{mg \text{ tag } 15°}{E} = 3{,}28 \cdot 10^{-6} \text{ C}}$$

b) Si duplicamos el campo eléctrico, como la carga sigue siendo la misma, obtenemos sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\boxed{\text{tag } \alpha = \frac{qE}{mg} \Rightarrow \alpha = 28{,}17°}$$

11 — *Septiembre 94*

Dos cargas se repelen, la una a la otra, con una fuerza de 10 N cuando están separadas 10 cm. ¿Cuánto valdrá la fuerza de repulsión entre ellas cuando estén separadas 2 cm?

a) 50 N. c) 2 N.
b) 250 N. d) 10 N.

Elige la opción que creas correcta y razónala brevemente.

La fuerza de atracción o repulsión entre dos cargas eléctricas puntuales es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa:

$$F = K\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{F \cdot r^2}{K}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 0{,}1^2}{9 \cdot 10^9}} = 3{,}3 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

Si separamos estas dos cargas una distancia de 2 cm la nueva fuerza de repulsión será:

$$\boxed{F = K\frac{Q^2}{r^2} = 250 \text{ N}}$$

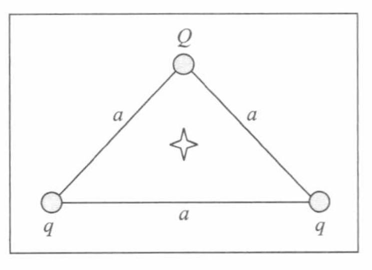
La solución es b) **250 N**

12 — *Septiembre 94*

a) Cuánto debe valer la carga Q, colocada en el vértice superior del triángulo equilátero de la figura, para que el potencial eléctrico total creado por las tres cargas sea nulo en el punto medio de su altura?

b) Si duplicamos el valor de esa carga, cuánto vale entonces el potencial eléctrico en dicho punto?

(Datos: $a = 2$ m, $q = 7{,}64 \cdot 10^{-6}$ C).



Calculamos la altura del triángulo equilátero utilizando el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$$

La distancia del punto medio de la altura a un vértice es:

$$\frac{2}{3} \cdot h = \frac{\sqrt{3}\, a}{3}$$

a) El potencial creado por el sistema de cargas puntuales en el punto medio de la altura es:

$$V = K\frac{q}{r} + K\frac{q}{r} + K\frac{Q}{r} = \frac{K}{r}2q + \frac{K}{r}Q = 0 \;\Rightarrow\; Q = -2q = -1{,}528 \cdot 10^{-5}\text{ C}$$

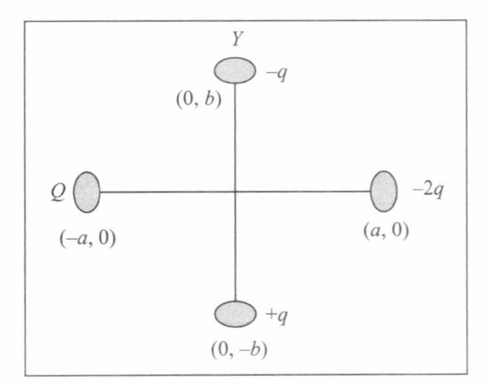
$$\boxed{Q = -1{,}528 \cdot 10^{-5}\text{ C}}$$

b) Si duplicamos el valor de esta carga, el potencial creado por el sistema de cargas en el ortocentro será:

$$\boxed{V = K\frac{q}{r} + K\frac{q}{r} + k\frac{2Q}{r} = \frac{K}{r}(2q + 2Q) = -119\,168 \text{ voltios}}$$

13 *Junio 95*

Halla el valor de Q en función de q, para que el potencial eléctrico generado por estas cuatro cargas sea nulo en el origen de coordenadas.



El potencial creado por las cuatro cargas puntales en el origen de coordenadas viene dado por:

$$V = K\frac{Q}{r_1} + k\frac{q}{r_2} + K\frac{-2q}{r_3} + K\frac{-q}{r_4} =$$

$$= K\left(\frac{Q-2q}{a} + \frac{q-q}{b}\right) = K\left(\frac{Q-2q}{a}\right)$$

Si igualamos el potencial a cero obtenemos el siguiente resultado:

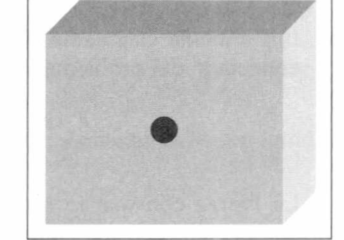
$$V = K\left(\frac{Q-2q}{a}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{Q = 2q}$$

14 *Junio 95*

En el centro de un cubo cuyas aristas miden 2 m, colocamos una carga puntual de $3 \cdot 10^{-9}$ C.

a) Calcula el flujo del campo eléctrico producido por dicha carga a través de la superficie delimitada por dicho cubo.
b) ¿Cuánto vale el flujo a través de una de las caras del cubo?
c) Si la carga no estuviera en el centro, ¿las respuestas a los apartados a y b anteriores serían las mismas? Explícalo sin hacer cálculos.

a) El flujo creado por una carga a través de una superficie cerrada que contiene a dicha carga en su interior, viene dado por la ley de Gauss.



$$\boxed{\phi = 4\pi K q = 339{,}3 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-1}}$$

b) Como un cubo tiene seis caras, el flujo a través de una de ellas será el flujo total dividido entre seis.

$$\boxed{\phi_c = \frac{\phi}{6} = 56{,}5 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-1}}$$

c) Si la carga no estuviera en su centro continuando en el interior del cubo la respuesta del apartado a) aplicando el teorema de Gauss sería la misma, sin embargo, el resultado del apartado b) variará según la situación que ocupe la carga, siendo mayor el flujo, cuanto más cerca se encuentre de la cara.

15 *Septiembre 95*

Elige la opción que creas correcta y razónala brevemente.

Dos cargas iguales separadas una cierta distancia se atraen mutuamente con una fuerza de 10^{-5} N. Cuando la separación es de 4 mm, la fuerza entre ellas es de $2{,}5 \cdot 10^{-6}$ N La separación inicial de las cargas es de:

a) 1 mm
b) 2 mm
c) 4 mm
d) 8 mm

La fuerza entre dos cargas, eléctricas puntuales es directamente proporcional al valor de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r que las separa.

$$F = K\frac{q \cdot q}{r^2} \Rightarrow q = \sqrt{\frac{F \cdot r^2}{K}} = 6{,}6 \cdot 10^{-11} \text{ C}$$

La separación inicial entre las cargas será:

$$r = \sqrt{\frac{K \cdot q^2}{F}} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 2 \text{ mm}$$

16 *Septiembre 95*

Tenemos dos esferas metálicas de radios 3 y 6 cm. La mayor está cargada hasta que el potencial en su superficie es de 3 000 V. La pequeña tiene un potencial en su centro de 12 000 V. Las separamos una distancia de 2 m que podemos considerar muy grande comparada con sus radios.

a) Calcula la fuerza con la que se repelen las dos esferas.
b) A continuación las unimos mediante un cable metálico muy fino. Transcurrido un cierto tiempo desconectamos el cable. Calcula ahora la nueva fuerza con la que se repelen las dos esferas.

a) Inicialmente calculamos la carga que posee cada una de las esferas indicadas en el enunciado del problema:

$$q_1 = \frac{V_1 \cdot r_1}{K} = 4 \cdot 10^{-8} \text{ C}; \qquad q_2 = \frac{V_2 \cdot r}{K} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

La fuerza con que se repelen las dos esferas, considerando que son muy grandes comparadas con sus radios viene dada por la ley de Coulomb:

$$F = \frac{Kq_1 \cdot q_2}{r^2} = 1{,}8 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

b) Si unimos las dos esferas mediante un cable metálico, la carga total se mantiene constante, y los potenciales se igualan.

$$q_1 + q_2 = 6 \cdot 10^{-8} \text{ C} \qquad (1)$$

$$K = \frac{q_1}{3 \cdot 10^{-2}} = K \frac{q_2}{6 \cdot 10^{-2}} \qquad (2)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos:

$$q_1 = 2 \cdot 10^{-8} \text{ C}; \qquad q_2 = 4 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

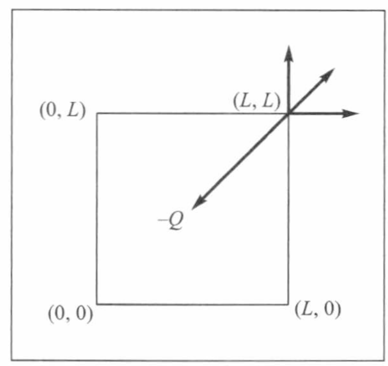
Aplicando de nuevo la ley de Coulomb para dos cargas eléctricas puntuales:

$$F = K \frac{q_1 \, q_2}{r^2} = 1{,}8 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

17 *Junio 96*

En el centro de un cuadrado se coloca una carga negativa $-Q$. En los vértices tenemos cuatro cargas iguales de valor $Q = 3 \cdot 10^{-3}$ C. Calcula el valor de Q si la fuerza resultante en cada vértice es nula.

Representamos el diagrama de fuerzas realizadas sobre una de las cargas situada en un vértice cualquiera.



Calculamos cada una de estas fuerzas, aplicando la ley de Coulomb:

$$\vec{F}_1 = \frac{Kqq}{L^2}\vec{i}\ ; \qquad \vec{F}_2 = \frac{Kqq}{2L^2}\left(\frac{\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{2}}\right); \qquad \vec{F}_3 = \frac{Kqq}{L^2}\vec{j}\ ; \qquad \vec{F}_4 = \frac{KQq}{L^2/2}\left(\frac{\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{2}}\right)$$

Aplicando el principio de superposición y sabiendo que la resultante debe ser igual a cero, se ha de cumplir:

$$\frac{Kqq}{L^2}\vec{i} + \frac{Kqq}{2L^2}\left(\frac{\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{Kqq}{L^2}\vec{j} + \frac{KQq}{L^2/2}\left(\frac{\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

Corresponde a una ecuación vectorial que la podemos descomponer en dos ecuaciones una para $\vec{i}$ y otra para $\vec{j}$. Cómo ambas son iguales, sólo nos quedamos con una de ellas.

$$\frac{Kqq}{L^2}\vec{i} + \frac{Kqq}{2L^2}\left(\frac{\vec{i}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{KQq}{L^2/2}\left(\frac{\vec{i}}{\sqrt{2}}\right) = 0 \Rightarrow q + \frac{q}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{Q}{1/2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

Despejando Q y sustituyendo q por su valor obtenemos:

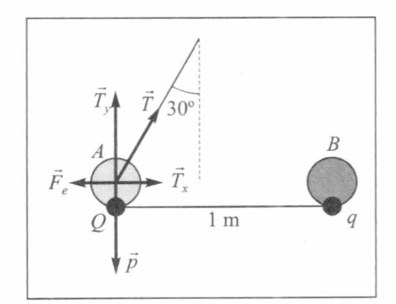
$$Q = -\frac{(2\sqrt{2}+1)\,q}{4} = 2{,}87 \cdot 10^{-3}\ \text{C}$$

18 *Septiembre 96*

Una bola A, de masa $m = 0{,}5$ g y carga Q, está suspendida de un hilo aislante de longitud $l = 0{,}6$ m. Se le aproxima otra bola igual, B, cargada $q = 10^{-8}$ C, y el hilo se separa de la vertical hasta tomar un ángulo $\theta = 30°$. En la posición final A y B están en la misma horizontal, separadas una distancia $d = 1$ m. Determinar:

a) El valor de la carga de A.
b) El valor del campo eléctrico creado por B en el punto donde está A y la fuerza que ejerce sobre A.

a) Representamos el diagrama de fuerzas:



Aplicando la 2ª ley de Newton a la bola A, obtenemos:

$$T_y = p \Rightarrow T\cos 30^\circ = \text{mg}$$

$$T_x = F_e \Rightarrow T\,\text{sen}\,30^\circ = \frac{KQq}{d^2}$$

De estas dos ecuaciones deducimos que:

$$Q = \frac{mg\,\text{tag}\,30^\circ \cdot d^2}{Kq} = 3{,}14 \cdot 10^{-5}\ \text{c}$$

b) La fuerza que ejerce la carga q sobre Q viene dada por la ley de Coulomb:

$$F = \frac{KQq}{d^2} = 2{,}83 \cdot 10^{-3}\ \text{N}$$

y el campo eléctrico creado por una carga puntual en el punto donde está A, será:

$$E = \frac{F}{q} = 282\,600\ \text{N/C}$$

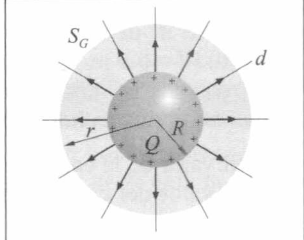
19 — *Junio 97*

Faraday afirmó que un objeto cargado de forma esférica de radio R se comporta, desde el punto de vista eléctrico, como si toda la carga estuviera concentrada en su centro. ¿Esta es una aproximación válida sólo para distancias r muy grandes comparadas con R ($r \gg R$) o es exactamente cierta para cualquier distancia $r > R$? Razona tu respuesta.

El flujo del campo eléctrico creado por una distribución cualquiera de carga, a través de una superficie cerrada, viene dado por la carga encerrada en el interior de la superficie dividida por la permitividad dieléctrica del medio. (Teorema de Gauss)

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_e}{\varepsilon_0}$$

- La esfera de radio R tiene una carga Q distribuida uniformemente.
- Por simetría, el campo es radial y sólo depende de la distancia r al centro de la esfera.
- Elegimos como superficie de Gauss S_0 una esfera concéntrica con la distribución de carga, de radio $r > R$.



Calculamos el flujo eléctrico a través de la superficie de Gauss S_0.

El campo eléctrico $\vec{E}$ tiene módulo constante y dirección paralela a $d\vec{S}$.

$$\Phi = \int_{S_0} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_0} E \cdot dS = ES_0 = E\,4\pi r^2$$

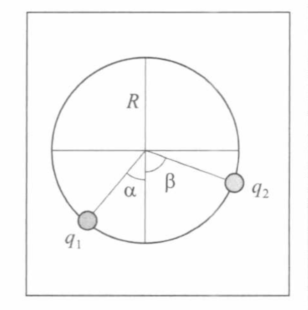
Aplicamos el teorema de Gauss:

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} = E\,4\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} = \frac{KQ}{r^2}$$

El *campo eléctrico* creado por una *distribución esférica de carga* en un punto exterior es el mismo que crearía una *carga puntual Q* situada en el *centro de la esfera.*

20 *Junio 97*

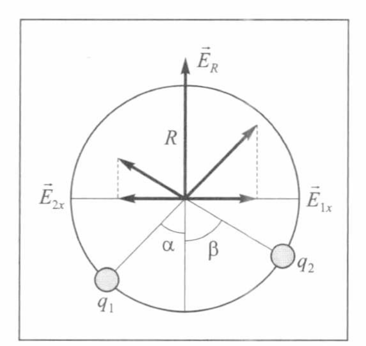
La figura nos muestra dos cargas positivas fijas en una circunferencia de Radio $R = 10$ cm siendo los ángulos. $\alpha = 20°$ y $\beta = 70°$. En el centro de la circunferencia, el campo eléctrico resultante producido por las dos cargas está dirigido hacia arriba, a lo largo del radio vertical.



a) Calcula el cociente q_1/q_2.
b) Supongamos ahora que las dos cargas son iguales. Sabiendo que el potencial eléctrico en el centro es $5{,}4 \cdot 10^5$ V, calcula el valor de ambas cargas. Da el resultado en microculombios.

a) Si el campo eléctrico resultante es vertical, se deduce que su componente horizontal deberá ser nula. Es decir: $E_1x = E_2x$

$$K\frac{q_1}{R^2}\cos 70° = K\frac{q_2}{R^2}\cos 20° \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{q_1}{q_2} = 2{,}74}$$



b) Según el principio de superposición aplicado a sistema de cargas puntuales $q_1 = q_2 = q$

$$V = V_1 + V_2 = 2\frac{kq}{R}$$

Despejando y sustituyendo datos:

$$\boxed{q = \frac{V \cdot R}{2 \cdot K} = 3 \cdot 10^{-6}\ \text{C} = 3\ \mu\text{C}}$$

21 *Septiembre 97*

Un cascarón esférico de 2 m de radio tiene uniformemente repartida una carga de $8 \cdot 10^{-8}$ C. Calcula módulo del campo eléctrico en un punto que dista 1 m de su centro y en otro punto que dista 3 m de su centro. Comenta los resultados que obtengas.

Una esfera conductora tiene su carga distribuida uniformemente sobre su superficie y por tanto es el mismo caso que el de este cascarón esférico.

En ambos casos al no existir carga en su interior su campo eléctrico es nulo y su potencial constante.

Así pues $\boxed{E_A = 0}$ *(siendo A cualquier punto interior de la esfera a 1 m de su centro).*

Para el caso de un punto exterior a la esfera conductora o cascarón esférico, éstos se comportan como si toda su carga estuviera concentrada en su centro geométrico. Por tanto:

$$\boxed{E_B = K\frac{Q}{r_B^2} = 80 \text{ N/C}}$$

(siendo B, cualquier punto a 3 m del centro de la esfera hueca).

22 *Septiembre 97*

Trasladamos sin variación de velocidad una carga de prueba de $1 \cdot 10^{-8}$ C entre dos puntos separados 15 cm. Supongamos que ambos puntos pertenecen a la misma superficie equipotencial, la de 25 000 V, de una carga puntual colocada en el origen de coordenadas y de valor $8 \cdot 10^{-8}$ C. Calcula el trabajo que debemos realizar.

El trabajo realizado para desplazar una carga puntual entre dos puntos A y B en el interior de un campo eléctrico viene dado por la variación de su energía mecánica.

$$W_{A-B} = \Delta E_{\text{mec}} = \Delta E_c + \Delta E_p$$

Como: $v = \text{cte.} \Rightarrow \Delta E_c = 0$

Como: $V_A = V_B \Rightarrow \Delta E_p = q\,(V_B - V_A) = 0$

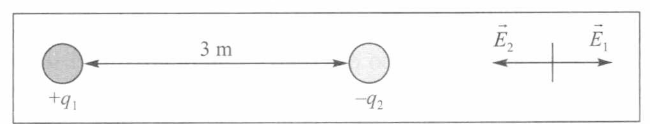
Luego: $\boxed{W_{A-B} = 0 \text{ J}}$

A lo largo de una superficie equipotencial, una carga determinada animada de una velocidad se moverá indefinidamente sin el concurso de ninguna fuerza externa.

23 *Junio 98 - 5 puntos*

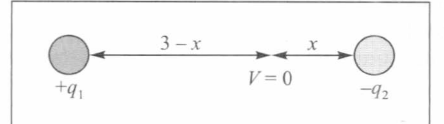
Una carga positiva $+q_1$ se coloca 3 m a la izquierda de una carga negativa $-q_2$. Las cargas tienen diferentes valores absolutos. A lo largo de la línea que contiene a las dos cargas, el *campo eléctrico* es nulo en un punto que está situado 1 m a la derecha de la carga negativa. En esa recta hay también dos puntos en los que el *potencial eléctrico* es nulo. Localiza dichos puntos dando su situación respecto de la carga negativa.

Representamos primero el diagrama de fuerzas:



A 1 m de la carga q_2 el campo eléctrico es nulo, es decir, los módulos de $\vec{E}_2$ y $\vec{E}_1$ deben ser iguales:

$$\frac{Kq_1}{4^2} = \frac{Kq_2}{1^2} \Rightarrow q_1 = 16q_2$$



El punto donde el potencial eléctrico es nulo, debe cumplir:

$$V = \frac{Kq_1}{3-x} - \frac{Kq_2}{x} = 0 \Rightarrow \frac{16q_2}{3-x} = \frac{q_2}{x} \Rightarrow 16x = 3 - x$$

$$\boxed{x = \frac{3}{7} = 0{,}18 \text{ m}} \quad \textit{a la izquierda de } -q_2$$

Realizando los mismos cálculos *a la derecha de* $-q_2$ obtenemos:

$$V = \frac{Kq_1}{3+x} - \frac{Kq_2}{x} = 0 \Rightarrow \frac{16q_2}{3+x} = \frac{q_2}{x} \Rightarrow 16x = 3 + x$$

$$\boxed{x = \frac{3}{15} = 0{,}2 \text{ m}}$$

24 *Junio 98 - 1 punto*

Un cascarón esférico de 4 m de radio tiene uniformemente repartida una carga de $2 \cdot 10^{-6}$ C. Calcula el potencial eléctrico en un punto que dista 2 m de su centro y en otro punto que dista 6 m de su centro.

El *potencial eléctrico* creado por una *distribución esférica de carga* en un punto interior o en la superficie es:

$$V = \frac{kQ}{R}$$

Siendo R el radio de la esfera:

$$\boxed{V = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{4} = 4\,500 \text{ voltios}}$$

El *potencial eléctrico* creado por una *distribución esférica de carga* en un punto exterior es el mismo que crearía una *carga puntual* Q situada en el *centro de la esfera.*

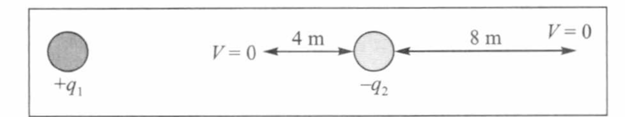
$$\boxed{V = \frac{KQ}{r} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{6} = 3\,000 \text{ voltios}}$$

25

Septiembre 98 - 5 puntos

Una carga positiva, q_1, está colocada a la izquierda de una carga negativa $-q_2$. A lo largo de la recta que las une, hay dos puntos en los que el potencial total es nulo. El primer punto está entre ellas, a una distancia de 4 m a la izquierda de la carga negativa. El segundo punto está a 8 m a la derecha de la carga negativa.

a) Calcula la distancia entre las cargas.
b) Halla el cociente entre los valores absolutos de las cargas q_1/q_2.



a) Aplicamos el principio de superposición en cada uno de los puntos indicados:

$$\frac{Kq_1}{x} - \frac{Kq_2}{4} \Rightarrow \frac{q_1}{x} = \frac{q_2}{4}$$

$$\frac{Kq_1}{12 + x} - \frac{q_2}{8} = 0 \Rightarrow \frac{Kq_1}{12 + x} = \frac{q_2}{8}$$

Si dividimos ambas ecuaciones, resulta:

$$\frac{12 + x}{x} = \frac{8}{4} \Rightarrow 12 + x = 2x \Rightarrow x = 12 \text{ m}$$

La separación entre las dos cargas es de: $\boxed{x + 4 = 16 \text{ m}}$.

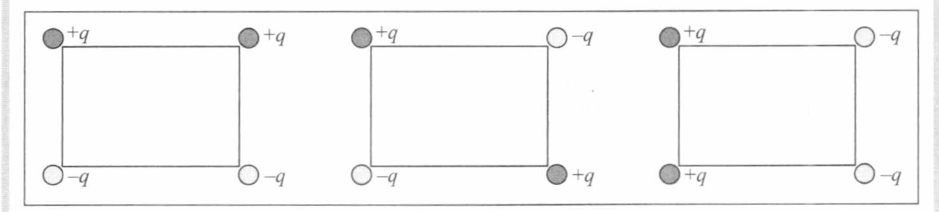
b) Sustituyendo $x = 12$ m en la 1ª ecuación obtenemos:

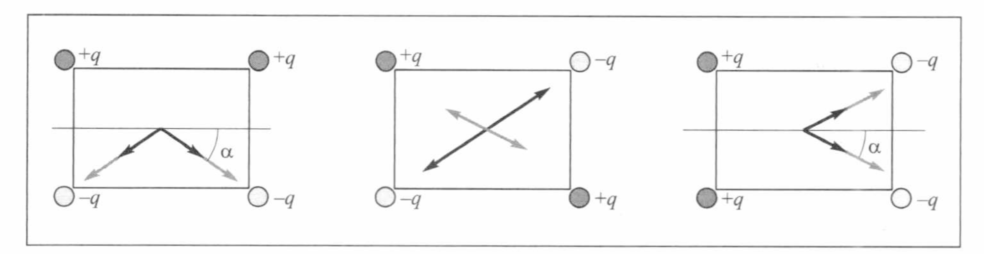
$$\boxed{\frac{q_1}{12} = \frac{q_2}{4} \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{12}{4} = 3}$$

26

Septiembre 98 - 1 punto

Los tres diagramas adjuntos nos muestran cuatro cargas colocadas en los vértices de un rectángulo de tres maneras diferentes, denominadas I, II, III. Consideremos el módulo del campo eléctrico resultante en el centro C del rectángulo. Ordena los módulos de los campos eléctricos, poniendo el más grande el primero. Justifica la ordenación.





De los diferentes diagramas de fuerzas se demuestra:

a) $E_x = 0$ y $E_y = 4k\dfrac{q}{d^2}\,\text{sen}\,\alpha$

b) $E_x = 0$ y $E_y = 0$

c) $E_x = 4K\dfrac{q}{d^2}\cos\alpha$ y $E_y = 0$

Como: $\alpha < 45° \Rightarrow \text{sen}\,\alpha < \cos\alpha \Rightarrow E_{\text{III}} > E_{\text{I}}$

Solución: $E_{\text{III}} > E_{\text{I}} > E_{\text{II}}$

27

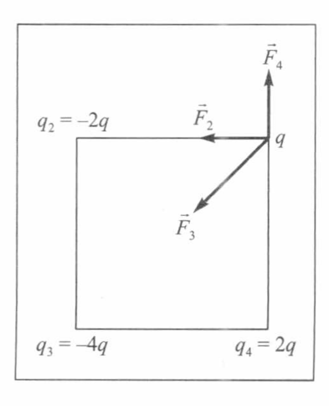
Junio 99 - 5 puntos

Disponemos cuatro cargas de los siguientes valores $+q$, $-2q$, $-4q$, y $+2q$ en los cuatro vértices de un cuadrado de lado $2L$, centrado en el origen de coordenadas. La primera carga está en el vértice que se encuentra en el primer cuadrante, la segunda en el vértice del segundo cuadrante y así sucesivamente hasta la cuarta carga.

a) Calcula el vector fuerza total que actúa sobre la carga $+q$ debido a las otras tres.
b) Calcula el vector fuerza total que actúa sobre una quinta carga Q que colocamos en el origen de coordenadas, es decir, en el centro del cuadrado.

(Datos: $q = 2 \cdot 10^{-5}$ C; $L = 1{,}5$ m; $Q = 10^{-8}$ C)

a) Calculamos las fuerzas que ejercen cada una de las cargas sobre la carga q:



$$\vec{F}_2 = K\frac{(-2q)\cdot q}{(2L)^2}\vec{i} = -0{,}8\,\vec{i}$$

$$\vec{F}_4 = K\frac{2q\cdot q}{(2L)^2}\vec{j} = 0{,}8\,\vec{j}$$

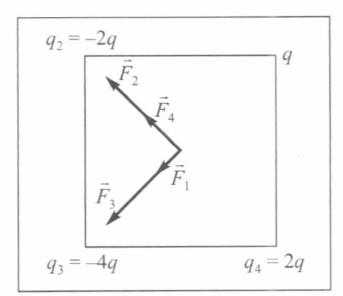
$$\vec{F}_3 = K\frac{(-4q)\cdot q}{(L\sqrt{8})^2}\cdot\left(\frac{2L}{L\sqrt{8}}\vec{i} + \frac{2L}{L\sqrt{8}}\vec{j}\right) =$$

$$= -0{,}55\,\vec{i} - 0{,}55\,\vec{j}$$

Aplicando el principio de superposición:

$$\vec{F} = \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = -1{,}35\,\vec{i} + 0{,}25\,\vec{j}\ \text{N}$$

b) Sobre la carga Q actuarán cuatro fuerzas producidas por las cargas situadas en los vértices del cuadrado.



$$\vec{F}_1 = K\frac{qQ}{(L\sqrt{2})^2}\cdot\left(\frac{-L}{L\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{L}{L\sqrt{2}}\vec{j}\right)$$

$$\vec{F}_3 = K\frac{-4qQ}{(L\sqrt{2})^2}\cdot\left(\frac{L}{L\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{L}{L\sqrt{2}}\vec{j}\right)$$

$$\vec{F}_2 = K\frac{-2qQ}{(L\sqrt{2})^2}\cdot\left(\frac{L}{L\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{L}{L\sqrt{2}}\vec{j}\right); \qquad \vec{F}_4 = K\frac{2qQ}{(L\sqrt{2})^2}\cdot\left(\frac{-L}{L\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{L}{L\sqrt{2}}\vec{j}\right)$$

Aplicando el principio de superposición:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \frac{-9KQq}{L^2(\sqrt{2})^3}\vec{i} - \frac{KQq}{L^2(\sqrt{2})^3}\vec{j} = -0{,}0025\,\vec{i} - 0{,}00028\,\vec{j}$$

28

Septiembre 99 - 5 puntos

Tenemos dos cargas puntuales positivas. Una de ellas, $Q = 10^{-3}$ C, se encuentra en el origen de coordenadas. La otra carga $q = 10^{-6}$ C, está muy alejada de la primera (podemos suponer que se encuentra en el infinito) y tienen una energía cinética de 5 J. Supongamos, además, que la carga q se mueve a lo largo del eje OX hacia la carga Q, la cual, mediante algún dispositivo mecánico está fija.

a) Calcula la distancia del acercamiento máximo entre ambas cargas.
b) Calcula la fuerza de repulsión entre ellas y la energía potencial eléctrica, ambas en el punto de máximo acercamiento.

Q (10^{-3} C) (0, 0)	q (10^{-6} C) ←

a) El campo gravitatorio es un campo conservativo, en ausencia de influencias extrañas a él debe cumplirse el principio de conservación de energía mecánica.

$$Ec_A + Ep_A = Ec_B + Ep_B$$

Como $Ep_A = Ep_B = 0$, ya que al final la carga q queda parada Ec_B, se deduce que:

$$Ec_A = Ep_B \Rightarrow Ec_A = \frac{kQq}{r}$$

Despejando y sustituyendo datos:

$$r = \frac{kQq}{Ec_A} = 1{,}8 \text{ m}$$

b) Aplicando la ley de Coulomb:

$$F = \frac{kQq}{r^2} = 2{,}77 \text{ N}$$

c) La energía potencial final debe ser igual a la energía mecánica como demostraremos a continuación:

$$Ep_B = \frac{kQq}{r} = 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-6} \cdot 10^{-3}}{1{,}8} = 5 \text{ J}$$

29 *Septiembre 99 - 1 punto*

Estamos midiendo el flujo eléctrico que atraviesa una superficie cerrada y obtenemos un valor nulo. ¿Podemos deducir, con toda seguridad que no hay cargas eléctricas en el interior de dicha superficie? Razona tu respuesta.

El *flujo eléctrico* a través de *una superficie cerrada S* es proporcional a la carga eléctrica neta que encierra la superficie:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_e}{\varepsilon_0}$$

Por tanto no se puede deducir que no hay carga eléctrica en el interior de la superficie, sin embargo, podemos afirmar que la carga neta (suma de cargas positivas y negativas) es cero.

30 *Junio 97 - 3,75 puntos*

Si juntamos dos cargas q_1 y q_2, obtenemos una carga total de $9 \cdot 10^{-6}$ C. Cuando separamos q_1 y q_2 hasta una distancia de 3 m, la fuerza que ejerce sobre otra vale $8 \cdot 10^{-3}$ N. Calcula el valor de q_1 y q_2.

a) Si ambas son positivas.
b) Si q_1 es positiva y q_2 es negativa.

Al juntar dos cargas la carga total o suma de ellas debe ser igual a $9 \cdot 10^{-6}$ C

$$q_1 + q_2 = 9 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

Si las separamos una distancia de 3 m la fuerza que ejercen entre ellas viene dada por la ley de Coulomb:

$$F = K\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \Rightarrow 8 \cdot 10^{-3} = 9 \cdot 10^9 \frac{q_1 \cdot q_2}{3^2}$$

a) Resolvemos el sistema de ecuaciones con dos incógnitas y obtenemos:

$$8 \cdot 10^{-3} = 9 \cdot 10^{9} \frac{q_1 \cdot (9 \cdot 10^{-6} - q_1)}{9} \Rightarrow 10^{9} \cdot q_1^2 - 9 \cdot 10^{3} \cdot q_1 + 8 \cdot 10^{-3} = 0$$

Si solucionamos esta ecuación de 2° grado resulta para:

$$\boxed{q_1 = 1 \cdot 10^{-6}\ \text{C}} \quad \text{y} \quad 8 \cdot 10^{-6}\ \text{C};$$

$$\boxed{q_2 = 9 \cdot 10^{-6} - 1 \cdot 10^{-6} = 8 \cdot 10^{-6}\ \text{C}} \quad \text{y} \quad 1 \cdot 10^{-6}\ \text{C}$$

b) Si una de las cargas es negativa el planteamiento sería idéntico con el único cambio de la 1ª ecuación por esta otra:

$$q_1 - q_2 = 9 \cdot 10^{-6}\ \text{C}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtendríamos una ecuación de 2° grado cuyas soluciones son:

$$\boxed{q_1 = 9{,}8 \cdot 10^{-6} \quad \text{y} \quad -0{,}8 \cdot 10^{-6}\ \text{C}; \qquad q_2 = -0{,}8 \cdot 10^{-6} \quad \text{y} \quad 9{,}8 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}$$

31

Septiembre 97 - 1,25 puntos

Si queremos mover una partícula cargada entre dos puntos cuya diferencia de potencial eléctrica es de 25 V, necesitamos realizar un trabajo de $7{,}5 \cdot 10^{-3}$ J. Calcula el valor absoluto de dicha carga.

Al ser el campo eléctrico un campo conservativo, el trabajo realizado por fuerzas externas puede ser calculado mediante la variación de la energía potencial.

$$W_{\text{ext}} = Ep_B - Ep_A = q\,(V_B - V_A)$$

Sustituyendo los datos que nos dan, obtenemos:

$$\boxed{q = \frac{W_{\text{ext}}}{V_B - V_A} = \frac{7{,}5 \cdot 10^{-3}}{25} = 3 \cdot 10^{-4}\ \text{C}}$$

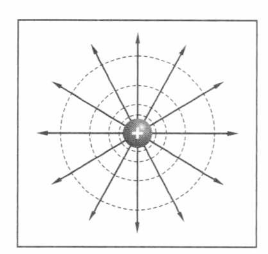
32

Junio 98 - 3,75 puntos

Consideremos las superficies equipotenciales producidas por una carga puntual de valor $q = 2 \cdot 10^{-8}$ C colocada en el origen de coordenadas.

a) Haz un esquema de las superficies equipotenciales.
b) Calcula la separación entre la superficie equipotencial de 6 000 V y la de 2 000 V.
c) Calcula el trabajo que tiene que realizar un agente externo para mover una carga de prueba $q_0 = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ C desde la superficie equipotencial de 6 000 V hasta la de 2 000 V sin variar su energía cinética.

a) En el plano quedaría así:



b) Sean $VB = 2\ 000$ (V) y $VA = 6\ 000$ (V):

$$r_A = K\frac{q}{V_A};$$

$$r_B = K\frac{q}{V_B} \Rightarrow r_B - r_A = Kq\left(\frac{1}{V_B} - \frac{1}{V_A}\right)$$

Sustituyendo cada potencial por su valor, resulta:

$$\boxed{r_B - r_A = 1{,}8 \text{ m}}$$

(El punto B es más exterior que el A).

c) El trabajo realizado por un agente externo si la velocidad no varía viene dado por la variación de su energía potencial:

$$\boxed{W_{A-B} = Ep_B - Ep_A = q\,(V_B - V_A) = -6 \text{ J}}$$

La carga se mueve espontáneamente en el sentido del campo, es decir, en el sentido de los potenciales decrecientes.

33 *Septiembre 98 - 1,25 puntos*

El potencial eléctrico es constante en una cierta región del espacio. ¿Cómo será el campo eléctrico en esa misma zona? Razona la respuesta.

Teniendo en cuenta que el campo eléctrico es conservativo, se puede expresar según el potencial de la siguiente forma:

$$\vec{E} = -\text{ grad } V$$

Si tenemos en cuenta solamente una dimensión la expresión anterior se puede escribir como:

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dx}\vec{i}$$

de donde se deduce que si el potencial es constante el campo eléctrico en esa zona será cero.

34 *Septiembre 98 - 1,25 puntos*

La superficie de un globo está pintada con pintura metalizada y cargada negativamente. ¿Cuál será la variación del potencial eléctrico sobre la superficie del globo a medida que este se va hinchando y aumenta por tanto su radio?

El *potencial eléctrico* creado por una *distribución esférica de carga* en un punto interior o en la superficie es:

$$V = \frac{kQ}{R}$$

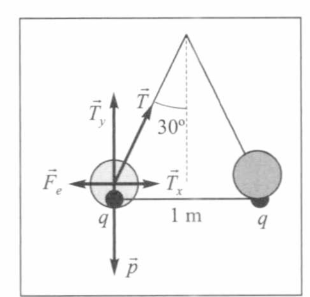
Siendo R el radio del globo. Al aumentar el globo de tamaño su radio será mayor y su potencial disminuirá en valor absoluto, ya que al ser la carga negativa su potencial será menos negativo y como consecuencia *mayor*.

35

Junio 99 - 3,75 puntos

Dos esferas puntuales iguales están suspendidas mediante hilos inextensibles y sin peso, de un metro de longitud cada uno, de un mismo punto. Determina la carga eléctrica que han de poseer cada una de ellas para que cada hilo forme un ángulo de 30° con la vertical. (Datos: masa de cada esfera $m = 10$ g; $K = 9 \cdot 10^9$ N · m²/C²; $g = 9,8$ m/s²).

El diagrama de fuerzas que interviene sobre la bolita será el siguiente:



Si aplicamos la 2ª ley de Newton a cada uno de los ejes, obtenemos:

$$T_x = F_e \Rightarrow T \operatorname{sen} 30° = \frac{Kq^2}{d^2}$$

$$T_y = p \Rightarrow T \cos 30° = mg$$

Dividiendo ambas expresiones y teniendo en cuenta que $d = 1$ m por formar un triángulo equilátero.

$$q = \sqrt{\frac{mg \operatorname{tag} 30° \cdot d^2}{K}} = 2,5 \cdot 10^{-6}\ \text{C}$$

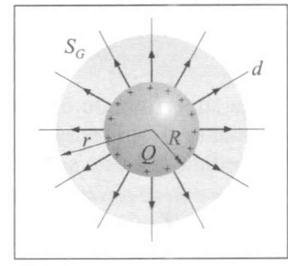
36

Junio 99 - 1,25

Enuncia el teorema de Gauss. Utilizando este teorema, comprueba que una esfera cargada eléctricamente se comporta en su exterior como una carga puntual situada en su centro.

El flujo del campo eléctrico creado por una distribución cualquiera de carga, a través de una superficie cerrada, viene dado por la carga encerrada en el interior de la superficie dividida por la permitividad dieléctrica del medio.

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_e}{\varepsilon_0}$$



- La esfera de radio R tiene una carga Q distribuida uniformemente.
- Por simetría, el campo es radial y sólo depende de la distancia r al centro de la esfera.
- Elegimos como superficie de Gauss S_0 una esfera concéntrica con la distribución de carga, de radio $r > R$.
- Calculamos el flujo eléctrico a través de S_0. Sobre la superficie de Gauss el campo eléctrico $\vec{E}$ tiene módulo constante y dirección paralela a $d\vec{S}$.

$$\Phi = \int_{S_0} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_0} E\, dS = ES_0 = E\, 4\pi r^2$$

Aplicamos el teorema de Gauss:

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} = E\, 4\pi r^2 \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} = \frac{KQ}{r^2}$$

El *campo eléctrico* creado por una *distribución esférica de carga* en un punto exterior es el mismo que crearía una *carga puntual* Q situada en el *centro de la esfera.*

37 *Septiembre 99 - 1,25 puntos*

Una esfera metálica de 3 cm de radio cuya carga es de 5 μC se pone en contacto con otra esfera conductora de 4,5 cm de radio inicialmente descargada. Explica el proceso que tiene lugar al ponerlas en contacto y calcula la carga final de cada esfera.

Cuando ambas esferas se ponen en contacto pasa carga de la esfera cargada a la no cargada hasta que se igualan los potenciales. Así pues, teniendo en cuenta que ambas esferas constituyen un sistema aislado y que en él se debe cumplir el principio de conservación de la carga, podemos establecer un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$q_{A_0} + q_{B_0} = q_A + q_B \Rightarrow q_A + q_B = 5 \qquad (1)$$

$$V_A = V_B \Rightarrow \frac{Kq_A}{3} = \frac{Kq_B}{4{,}5} \qquad (2)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos un valor para las cargas y potenciales de:

$$\boxed{q_B = 3\ \mu\text{C}} \; ; \quad \boxed{q_A = 2\ \mu\text{C}} \quad y \quad \boxed{V_A = V_B = 6 \cdot 10^5\ \text{V}}$$

38 *Junio 2000 - 1,25 puntos*

Una carga eléctrica de 4 C es llevada desde un punto, donde existe un potencial de 15 V, a otro punto cuyo potencial es de 40 V. Indica si gana o pierde energía y cuánta.

La energía potencial de la carga de 4 C en un punto donde el potencial es de 15 V, viene dado por:

$$Ep_A = q \cdot V_A = 4 \cdot 15 = 60\ \text{J}$$

Y la energía potencial en otro punto donde el potencial es de 40 V será:

$$Ep_B = qV_B = 4 \cdot 40 = 160\ \text{J}$$

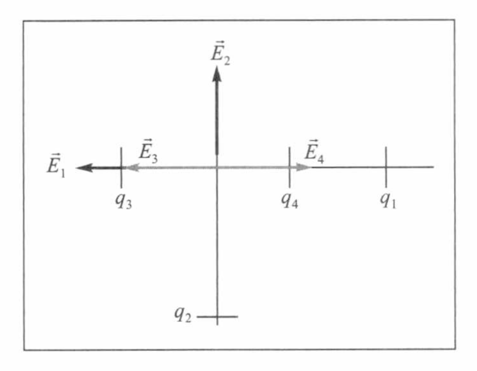
Cuando la carga q pasa del punto A al punto B gana:

$$\boxed{Ep_B - Ep_A = 100\ \text{J}}$$

39 *Junio 2000 - 3,75 puntos*

En los puntos *A* (4, 0), *B* (0, –4), *C* (–2, 0) y *D* (2, 0) de un sistema de coordenadas cartesianas expresadas en metros, se encuentran, respectivamente, las cargas eléctricas $q_1 = 14 \cdot 10^{-5}$ C, $q_2 = 23 \cdot 10^{-5}$ C, $q_3 = -8 \cdot 10^{-5}$ C, y $q_4 = -6 \cdot 10^{-5}$ C. Calcular:

a) La intensidad de campo eléctrico en el punto (0, 0).
b) El potencial eléctrico en el punto (0, 0).
c) La energía potencial eléctrica que adquiere una carga de $25 \cdot 10^{-6}$ C al situarse en ese punto. (Dato: $K = 9 \cdot 10^9$ N · m²/C²).



a) Del dibujo de campos creados por las distintas cargas sobre el punto (0, 0) se deduce que:

$$\vec{E}_x = \left(E_4 - (E_1 + E_3)\right)\vec{i}$$

$$\vec{E}_y = E_2\,\vec{j}$$

Así pues:

$$E_1 = \frac{Kq_1}{r_1^2} = 78\,750 \text{ N/C};$$

$$E_2 = \frac{Kq_2}{r_2^2} = 129\,375 \text{ N/C}; \qquad E_3 = \frac{Kq_3}{r_3^2} = 18\,000 \text{ N/C}; \qquad E_4 = \frac{Kq_4}{r_4^2} = 135\,000 \text{ N/C}$$

Por tanto:

$$\vec{E}_x = \left(135\,000 - (78\,750 + 180\,000)\right)\vec{i} = -123\,750\,\vec{i}\,; \qquad \vec{E}_y = 129\,375\,\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{E} = -123\,750\,\vec{i} + 129\,375\,\vec{j}}$$

b) El potencial eléctrico en el punto (0, 0) lo calculamos aplicando el principio de superposición:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = K\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \frac{q_4}{r_4}\right) = \boxed{2{,}025 \cdot 10^5 \text{ V}}$$

c) Su energía potencial eléctrica, la podemos obtener sabiendo el potencial en el punto (0, 0).

$$\boxed{Ep = qV = 5{,}06 \text{ J}}$$

40 *Septiembre 2000 - 1,25 puntos*

Haz la gráfica que representa la variación de la intensidad del campo eléctrico, creado por una esfera conductora de radio *R* y carga *Q*, con la distancia al centro de la esfera.

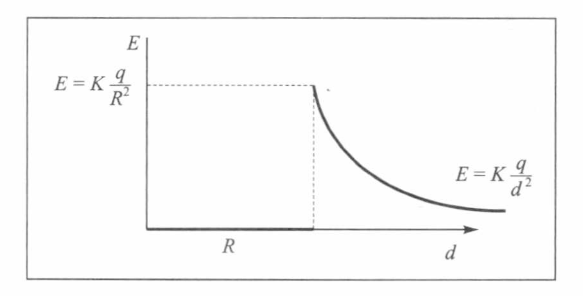
En una esfera conductora toda la carga (por repulsión mutua) se aleja del centro y se distribuye uniformemente en la superficie de tal forma que:

$$E_{\text{int}} = K\frac{q}{r_i} = 0 \quad \text{para} \quad r_i < R = \text{radio de la esfera}$$

y así mismo, los efectos que produce dicha carga para distancias $d \geq R$ son los mismos que si toda la carga estuviera concentrada en el centro de dicha esfera. Así pues:

$$E_{\text{superficie}} = K\frac{q}{R^2} \quad \text{y} \quad E_{\text{exterior}} = K\frac{q}{d^2} \quad \text{para} \quad d \geq R$$

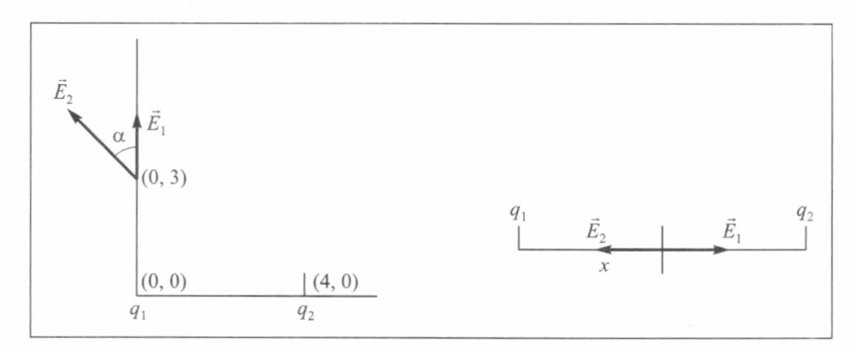
Por tanto la gráfica que relaciona E y d será como sigue:



41 *Septiembre 2000 - 3,75 puntos*

Dos cargas eléctricas $q_1 = 3 \cdot 10^{-6}$ C y $q_2 = 2 \cdot 10^{-6}$ C se encuentran, respectivamente, en los puntos (0, 0) y (4, 0) de un sistema de referencia medido en metros. Hallar:

a) La intensidad del campo eléctrico en el punto (0, 3).
b) Un punto del plano cartesiano donde la intensidad del campo eléctrico sea nulo.
c) La energía potencial del sistema de cargas.



a) Los vectores intensidad de campo creado por cada una de las cargas en el punto (0, 3) vienen dados por:

$$\vec{E}_1 = K\frac{q_1}{r_1^2}\vec{j} = 9 \cdot 10^9 \frac{3 \cdot 10^{-6}}{3^2} = 3\,000\,\vec{j} \text{ N/C}\,; \qquad \vec{E}_2 = K\frac{q_2}{r_2^2}\left(\cos\alpha\,(-\vec{i}\,) + \text{sen}\,\alpha\,\vec{j}\right)$$

$$\vec{E}_2 = 9 \cdot 10^9 \, \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\left(\sqrt{3^2 + 4^2}\right)^2} \cdot \left(\frac{4}{5}(-\vec{i}\,) + \frac{3}{5}\vec{j}\,\right) = -\,576\,\vec{i} + 432\,\vec{j} \text{ N/C}$$

Aplicando el principio de superposición:

$$\boxed{\vec{E}_C = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -\,576\,\vec{i} + 3\,432\,\vec{j} \text{ N/C}}$$

b) La única posibilidad de que el campo se anule es en un punto interior del segmento que une a ambas cargas.

Supongamos que ese punto esté a una distancia "x" de "q_1"

$$E_1 = E_2 \;\Rightarrow\; K\frac{q_1}{x^2} = K\frac{q_2}{(4-x)^2}$$

Sustituyendo datos y operando:

$$\frac{3 \cdot 10^{-6}}{x^2} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{(4-x)^2} \;\Rightarrow\; x = 2{,}20$$

Solución $\vec{E} = 0$ en el punto $\boxed{(2, 20, 0)}$.

c) La energía potencial del sistema formado por "q_1" y "q_2" será igual a:

$$\boxed{Ep = K\frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}} = 1{,}35 \cdot 10^{-2} \text{ J}}$$

TEMA 5

CAMPO MAGNÉTICO E INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

RESUMEN TEÓRICO DEL TEMA

1. Campo magnético

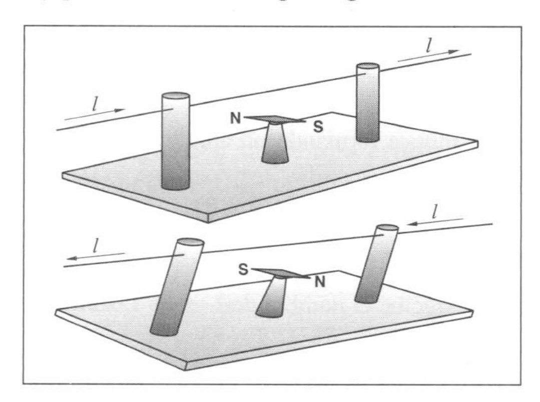
1ª Definición: Es aquella región del espacio donde se hacen visibles los efectos magnéticos.

2ª Definición: Es la perturbación que un *imán* o una *corriente eléctrica* producen en el espacio que los rodea.

3ª Definición: Región del espacio donde se ejerce una fuerza sobre un imán o sobre una corriente eléctrica colocada en ella.

2. Experimento de Oersted

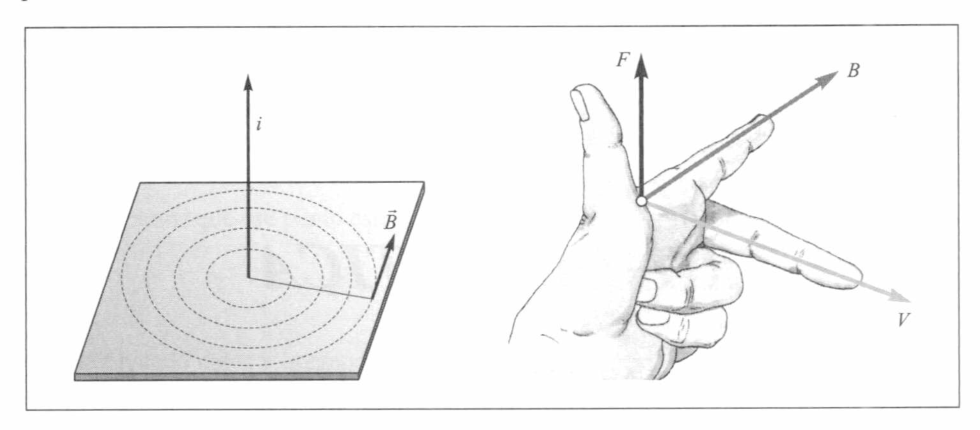
Realizó un experimento que puso de manifiesto que la corriente eléctrica, ejercía sobre una brújula los mismos efectos que un imán, orientándola perpendicularmente a la dirección del conductor y produciendo un campo magnético.



3. Ley de Lorentz. Fuerza sobre una carga en movimiento

Al igual que los campos eléctricos los campos magnéticos se pueden materializar mediante líneas de fuerza, que pueden presentar distintas formas según el agente creador del campo.

Ejemplo: Las líneas de fuerza de campo magnético creado por un conductor rectilíneo por el que circula una corriente son circunferencias con centro el conductor, las representaremos por cruces si al atravesar el papel van hacia dentro y en caso contrario por puntos.



Se define inducción magnética de un campo y se representa por B a la fuerza que actúa sobre cada unidad positiva de carga que se desplaza perpendicularmente a las líneas de fuerza, con una unidad de velocidad.

$$B = \frac{F}{q \cdot v}$$

La unidad de B en S.I. es el Tesla: $1\,\mathrm{T} = \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{C} \cdot \mathrm{m}/\mathrm{s}}$.

De la expresión anterior, la fuerza ejercida por un campo magnético sobre una carga que se mueve perpendicularmente a las líneas de fuerza es igual al producto de la inducción magnética B, la carga y la velocidad.

La dirección y sentido de la fuerza que actúa sobre la carga móvil viene dada por la regla de la mano izquierda. El dedo corazón señala el sentido de la velocidad, el índice el sentido de la línea de fuerza y el pulgar el sentido de la fuerza que actúa sobre la carga en movimiento.

En general si la carga se mueve formando un ángulo α con la dirección del campo, el valor de la fuerza es:

$$\vec{F} = q\,(\vec{v} \times \vec{B})$$

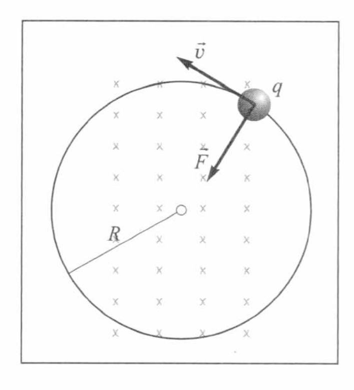
siendo el módulo de $F = q \cdot v \cdot B \cdot \operatorname{sen} \alpha$.

Expresión matemática que recibe el nombre de **Ley de Lorentz**.

4. Movimiento de una carga dentro de un campo magnético

Una partícula eléctrica que penetra perpendicularmente a las líneas de fuerza de un campo magnético uniforme describe un movimiento circular.

Si una carga q positiva penetra perpendicularmente en un campo magnético con una velocidad $\vec{v}$, estará sometida a una fuerza $\vec{F}$ perpendicular a la velocidad $\vec{v}$ y a la inducción



magnética B, y en nuestro caso, estará contenida en el plano del papel dirigiéndose hacia el centro de la circunferencia.

Aplicando la 2ª ley de Newton: Fuerza centrípeta igual a la fuerza magnética, se tiene:

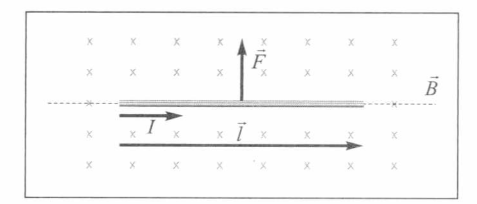
$$q \cdot v \cdot B = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow R = \frac{m \cdot v}{q \cdot B}$$

El radio de la trayectoria es proporcional a la cantidad de movimiento de la partícula e inversamente proporcional a la carga y a la inducción magnética.

$$R = \frac{m \cdot w \cdot R}{qB} \Rightarrow 1 = \frac{m \frac{2\pi}{T}}{qB} \Rightarrow T = \frac{m \cdot 2\pi}{qB}$$

El período de la órbita es independiente de la velocidad.

5. Fuerza sobre un conductor rectilíneo. Ley de Laplace



La figura representa una porción l de conductor rectilíneo contenido en un campo magnético $\vec{B}$ de inducción. Por el conductor para una corriente I.

La fuerza que ejerce un campo magnético sobre un conductor rectilíneo depende de la intensidad de corriente, de la longitud del conductor, de la inducción magnética y del ángulo que forma el conductor con el campo magnético:

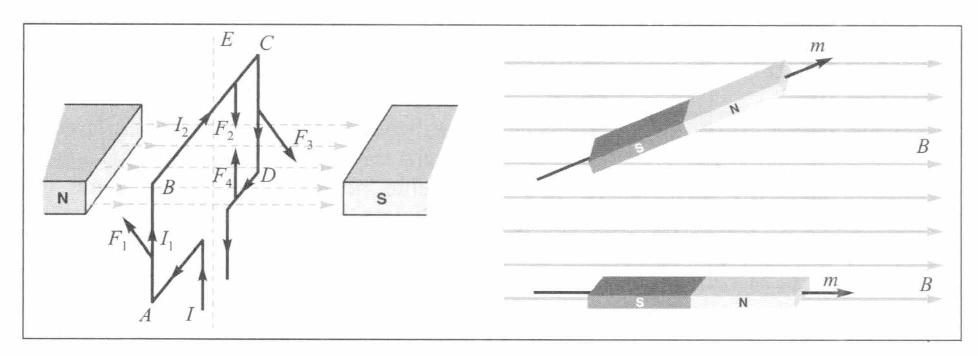
$$F = IlB \text{ sen } \alpha$$

La dirección y sentido de la fuerza vienen dadas por la regla descrita para una carga.

En forma vectorial:

$$\vec{F} = I\,(\vec{l} \times \vec{B}) \qquad \textit{Ley de Laplace}$$

6. Acción de un campo magnético sobre una espira. Momento dipolar magnético



Supongamos un conductor de forma rectangular, capaz de girar alrededor del eje *E*. Este conductor se puede descomponer en cuatro conductores rectilíneos, sobre cada uno de los cuales, actúa una fuerza magnética.

F_1 y F_3 forman un par que produce un movimiento de rotación sobre la espira. En este hecho se fundan los motores eléctricos.

El momento del par vale:

Si el ángulo que forma el vector superficie y el vector campo es α, el módulo del momento del par de fuerzas será:

$$M = F_1 \cdot l_2 \cdot \text{sen}\ \alpha = I \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot B \cdot \text{sen}\ \alpha = ISB\ \text{sen}\ \alpha$$

En forma vectorial:

$$\vec{M} = I\,(\vec{S} \times \vec{B})$$

Se define momento magnético de una espira a $\vec{m} = I \cdot \vec{S}$.

El momento de un par de fuerzas que actúa sobre una espira de momento magnético $\vec{m}$ es:

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

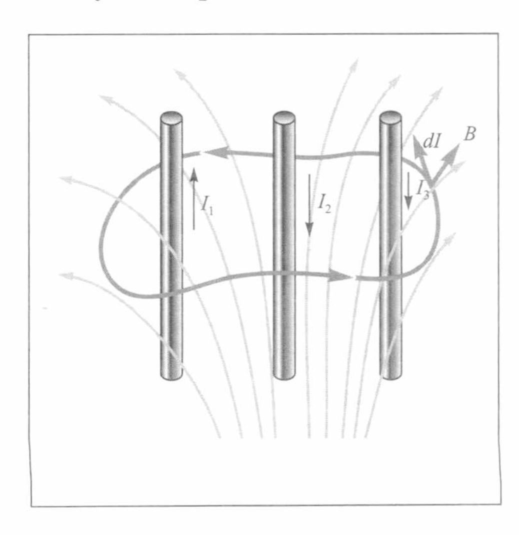
Si en lugar de una espita es una bobina de *N* espiras su momento magnético es:

$$\vec{m} = NI\vec{S}$$

El momento es nulo cuando sen $\alpha = 0$. *Esto ocurre cuando la espira se coloca perpendicularmente al campo magnético.*

Lo mismo sucederá al situar un imán en el interior de un campo magnético, pues el imán puede considerarse equivalente a una bobina. Si definimos el momento magnético del imán $\vec{m}$, como un vector que sale del polo norte y cuyo valor se corresponde con el de una bobina que produjese, los mismo efectos, éste se orientará de forma que su momento magnético se alinee con el campo.

7. Ley de Ampère

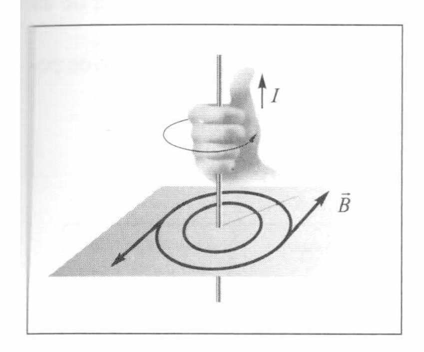


Sabemos que un campo es conservativo si el trabajo realizado por las fuerzas del campo a lo largo de una trayectoria cerrada es nulo, y en este caso definimos una función llamada energía potencial.

Dado un campo magnético cualquiera generado por ciertas corrientes, al considerar una trayectoria cerrada, el trabajo realizado por el vector $\vec{B}$ a lo largo de dicha trayectoria resulta ser igual a la corriente neta *I* supuesta constante que atraviesa el área que limita la trayectoria, multiplicada por μ_0.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0\,(I_1 - I_2 - I_3)$$

8. Campo magnético creado por una corriente rectilínea e indefinida y un solenoide

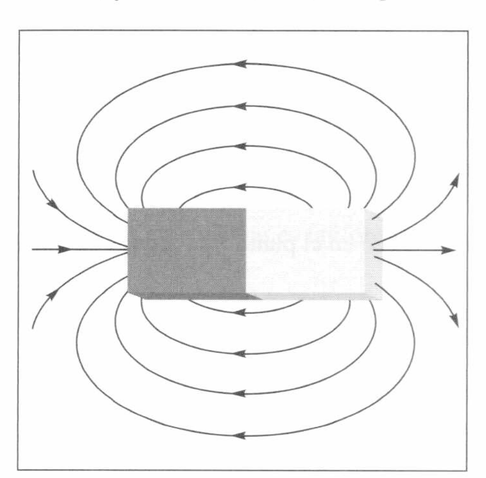


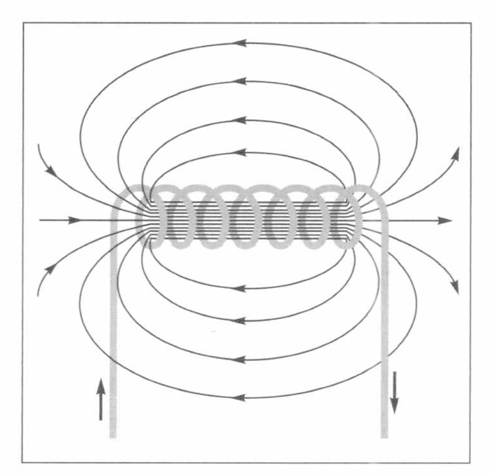
Un conductor rectilíneo crea un campo magnético, cuyas líneas de fuerza son circunferencias con centro el conductor y cuya inducción magnética en un punto situado a una distancia r del mismo viene dada por:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I \Rightarrow \vec{B} \oint d\vec{l} = \mu_0 \cdot I;$$

$$B \cdot l = \mu_0 \cdot I \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r}}$$

Siendo $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (T · m)/A la permeabilidad magnética en el vacío.





Por otra parte, una espira circular crea un campo magnético cuyas líneas de fuerza son circunferencias con centro en la espira, y cuya inducción magnética, en el centro de la espira, es:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2R}$$

donde R es el radio de la espira.

Un solenoide es un conductor arrollado en espiral, de forma que las espiras se encuentren muy próximas.

Las líneas de inducción del campo magnético creado por un solenoide se asemejan externamente a las de un imán recto.

El campo interior a las espiras es mucho mayor y constante en todos los puntos, viniendo determinada por la fórmula:

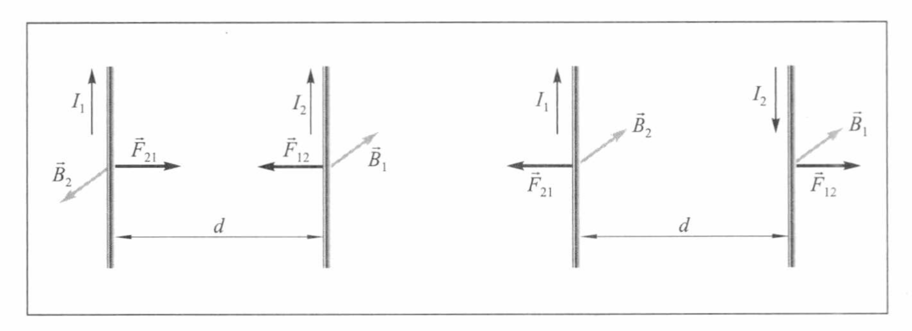
$$B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{l}$$

donde: N es el número de espiras,
I la intensidad de la corriente y
l la longitud del solenoide.

Observaciones:

- En el interior de un solenoide, el sentido de las líneas de fuerza es de avance de un sacacorchos que gira en el sentido de la corriente.
- Al ser atravesado por una corriente, un solenoide se convierte en un imán, cuyos polos norte y sur son los extremos por donde salen y entran, las líneas de fuerza.

9. Fuerzas entre corrientes paralelas. Definición de Amperio



Supongamos dos conductores rectilíneos y paralelos separados una distancia d y por los que pasan corrientes I_1, I_2 en el mismo sentido.

Conductor 1. Este conductor crea un campo magnético en el punto P_2 donde se concentra el conductor 2 que vale:

$$B_1 = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot d}$$

Este campo ejerce una fuerza sobre el conductor 2 que viene dado por:

$$F_{12} = I_2 \cdot l_2 \cdot B_1 = \left(\frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi \cdot d} \right) \cdot l_2$$

Conductor 2. Este conductor crea un campo magnético en el punto P_1 donde se encuentra el conductor 1 que vale:

$$B_2 = \frac{\mu_0 \cdot I_2}{2\pi \cdot d}$$

Este campo ejerce una fuerza sobre el conductor 1 que viene dado por:

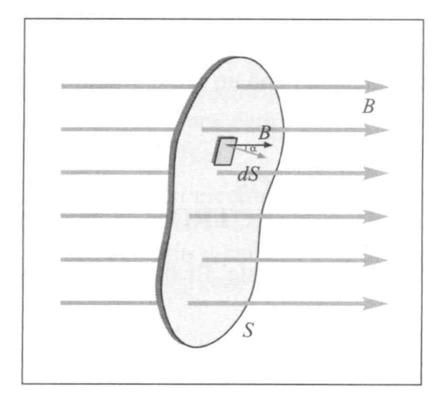
$$F_{21} = I_1 \cdot l_1 \cdot B_2 = \left(\frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi \cdot d} \right) \cdot l_1$$

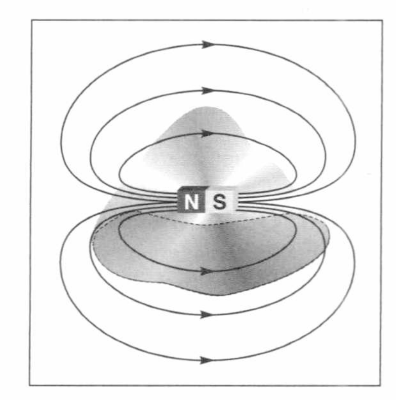
Estas dos fuerzas F_{12} y F_{21} tienen la misma dirección pero sentido opuesto.

De donde se deduce: Dos conductores paralelos e indefinidos por los que circulan corrientes en el mismo sentido se atraen. Dos conductores por los que circulan corrientes en sentido contrario se repelen.

Amperio: Es la corriente que circulando por dos conductores paralelos e indefinidos separados una distancia de un metro, en el vació, produce sobre cada conductor una fuerza de $2 \cdot 10^{-7}$ N por metro de longitud del conductor.

10. Flujo del campo magnético: Ley de Gauss





Se define flujo magnético a través de una superficie al número total de líneas de fuerza que atraviesan la misma.

Matemáticamente para el campo magnético el flujo se define como:

$$\Phi = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_S B \cdot dS \cos \alpha$$

Si el campo magnético es uniforme:

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos \alpha$$

donde α es el ángulo que forma el vector campo y el vector superficie.

La unidad de flujo en el S.I. es el weber (Wb) = T · m^2.

Al estudiar el flujo que atraviesa una superficie cerrada, hemos encontrado para el campo gravitatorio y el campo eléctrico las siguientes expresiones:

$$\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi \cdot Gm \, ; \qquad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi \cdot K \cdot q$$

Sin embargo, debido a que las líneas de un campo magnético son cerradas, las líneas que entran en la superficie Gaussiana también salen y el flujo total será igual a cero.

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

11. Ley de Faraday Henry: Ley de Lenz

Cuando varía el flujo magnético que atraviesa un circuito cerrado, aparece en él una corriente eléctrica inducida, cuya fuerza electromotriz inducida es proporcional a la variación con el tiempo de dicho flujo magnético.

$$\varepsilon = -K \frac{d\Phi}{dt}$$

Si utilizamos como unidades las del sistema internacional, la constante de proporcionalidad resulta ser el unidad.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

El signo "–" fue Lenz quien lo determinó, "El sentido de la corriente es tal que se opone a la causa que lo produce", o bien, la corriente inducida tiene un sentido tal que se opone al aumento o disminución del flujo.

CUESTIONES Y EJERCICIOS DE CAMPO MAGNÉTICO E INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

1. Elige la opción que creas correcta y razónala brevemente. El flujo magnético que atraviesa una espira, depende de:

a) El valor del campo magnético donde ha sido introducida.
b) El tamaño de la espira.
c) La posición que tiene ésta respecto del campo magnético.
d) Los tres factores anteriores. (Solución: d))

2. Un protón de masa $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg y carga $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, se mueve dentro de un campo magnético de 0,003 T. ¿Cuál es la velocidad de este protón si su trayectoria es una circunferencia de radio $R = 0{,}2$ m en un plano perpendicular al campo magnético? (Solución: 57 845 m/s)

3. ¿Qué fuerza ejerce un campo magnético uniforme y estacionario de 0,2 T sobre un conductor rectilíneo, perpendicular a él, de 30 cm de largo y por el que circula una corriente de 5 A? (Solución: 0,3 N)

4. Enuncia brevemente la ley de Ampère.

5. Enuncia la ley de Lenz y pon un ejemplo en el que tengas que usarla.

6. Elige la opción que creas correcta y razónala brevemente. Un electrón entra en una zona del espacio en la que hay un campo magnético, con una velocidad paralela a dicho campo magnético. El electrón:

a) No se ve afectado.
b) cambia de dirección.
c) Cambia de velocidad.
d) Cambia de energía. (Solución: a))

7. Elige la opción que creas correcta y razónala brevemente. Una corriente inducida la podemos obtener:

a) Colocando un imán enfrente de una espira.
b) Colocando dos imanes cercanos.
c) Aproximando o alejando un imán a una espira.
d) Manteniendo fijo un imán dentro de una espira. (Solución: c))

8. Una partícula cargada se mueve recorriendo una circunferencia bajo la influencia de un campo magnético perpendicular al plano que contiene a la circunferencia. En un cierto instante, y por razones que no vamos a considerar, se invierte la velocidad de la partícula. ¿Recorrerá la misma circunferencia, girando en sentido contrario? Si la respuesta fuera no, dibuja la nueva trayectoria. Justifica tu respuesta. (Solución: no)

9. Se debe aplicar un par de fuerzas de $4 \cdot 10^{-3}$ N · m para mantener la aguja de una brújula formando un ángulo recto con el campo magnético terrestre, $B = 5 \cdot 10^{-5}$ T. ¿Cuánto vale el momento magnético de esa brújula? (Solución: 80 N · m/T)

10. Si un electrón atraviesa una región del espacio sin sufrir ninguna desviación, ¿podemos afirmar que en esa región no hay un campo magnético? De existir, ¿cómo tiene que ser? Razona tu respuesta.

11. Un protón se mueve en un plano perpendicular a un campo magnético de 0,15 T y describe una trayectoria circular de 15 cm de radio. El protón tiene una masa de $1,7 \cdot 10^{-27}$ kg y una carga de $1,6 \cdot 10^{-19}$ C. ¿Cuál es la velocidad del protón? (Solución: $2,1 \cdot 10^{6}$ m/s)

12. Un protón y un electrón ambos con la misma energía cinética, describen trayectorias circulares en una zona del espacio en la que existe un campo magnético uniforme, estacionario y perpendicular al plano que contiene ambas órbitas. ¿Cuál de las dos trayectorias tiene radio mayor? (Solución: tiene radio mayor la trayectoria del protón)

13. Consideramos una bobina compuesta por 800 espiras circulares, teniendo cada una de ellas una sección transversal de 20 cm^2. La bobina está colocada en un campo magnético uniforme de 0,5 T. Giramos la bobina 90º desde una orientación paralela al campo hasta otra orientación perpendicular al campo. Si tardamos 0,4 s en girarla, ¿cuánto vale el módulo de la fuerza electromotriz media inducida en dicha bobina? (Solución: 2 V)

14. Un electrón penetra por la izquierda con velocidad v_0 paralela al plano del papel en el que escribes. En la zona del espacio delimitada por tu papel hay un campo magnético B uniforme, perpendicular al plano del papel y dirigido hacia arriba. Dibuja la trayectoria que sigue el electrón.

15. Una carga eléctrica puede experimentar fuerzas eléctricas y magnéticas. ¿Cómo puedes distinguir si la fuerza que hace que una carga se desvíe de la trayectoria recta es de origen eléctrico o magnético?

16. Un alambre recto y largo transporta una corriente de 50 A. Un electrón que viaja a $1,5 \cdot 10^{7}$ m/s se encuentra a 5 cm del alambre. ¿Cuánto vale el módulo de la fuerza que actúa sobre el electrón si su velocidad es paralela al alambre? (Datos: $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$ en el SI; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C). (Solución: $4,8 \cdot 10^{-16}$ N)

17. Por un conductor rectilíneo, dirigido a lo largo OY, circula en el sentido positivo del mencionado eje, una corriente eléctrica $I = 20$ A. Calcula el vector que nos da la fuerza, por unidad de longitud, que sobre este conductor ejerce el siguiente campo magnético, $\vec{B} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$ T. (Solución: $60\vec{i} - 40\vec{k}$ N)

18. Un electrón describe una órbita circular con velocidad $v = 5 \cdot 10^{8}$ m/s dentro de un campo magnético de valor $B = 2 \cdot 10^{-2}$ T. ¿Cuánto vale el módulo de la fuerza que experimenta el electrón? (Datos: $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C). (Solución: $1,6 \cdot 10^{-12}$ N)

19. La acción de un campo magnético sobre un conductor por el que circula una corriente viene descrita por la denominada 2º ley de Laplace. Enúnciala.

20. Un campo magnético de 0,3 T perpendicular al plano del papel es responsable de que una partícula de masa 10^{-8} kg recorra una circunferencia de radio 0,4 m con una velocidad de 120 m/s de módulo constante. Calcula la carga que tiene dicha partícula. (Solución: 10^{-5} C)

21. Por un alambre de 5 m de largo circula una corriente de 1,5 A en una zona del espacio en la que hay un campo magnético uniforme y estacionario. El alambre sufre una fuerza de 2,77 N cuando forma un ángulo de 38º con el campo magnético. Calcula la magnitud de dicho campo magnético. (Solución: 0,6 T)

22. Elige la opción que creas correcta y razónala brevemente. Se lanza un protón dentro de una región del espacio en la que existe un campo magnético uniforme. El protón no se desviará de su trayectoria si su velocidad:

a) Es perpendicular al campo magnético.
b) Es paralela al campo magnético.
c) Forma un ángulo de 45° con las líneas del campo magnético.
d) Es igual a la de propagación del sonido en el aire a $T = 25$ °C. (Solución: b))

23. Un electrón se mueve por la parte positiva del eje *OX*, hacia las *X* crecientes, con una velocidad uniforme de $5 \cdot 10^5$ m/s. Dicho electrón experimenta una fuerza de $4 \cdot 10^{-14}$ N hacia la parte positiva del eje *OY*. Calcula la magnitud, dirección y sentido del campo magnético responsable de esa fuerza. (Dato: El valor absoluto de la carga del electrón es $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C). (Solución: $\vec{B} = 0{,}5\vec{k}$ T)

24. Una partícula de masa *m*, carga *q* y velocidad *v* se mueve en una región del espacio en la que actúan un campo eléctrico y un campo magnético. Escribe y comenta un poco la expresión que nos permite averiguar la fuerza total que actúa sobre dicha partícula. (Solución: $q\,(\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B}))$)

25. Escribe las tres expresiones que nos permiten expresar, en lenguaje matemático, la acción que un campo magnético ejerce sobre: una carga en movimiento, una corriente rectilínea y una espira respectivamente.

26. Elige la opción que creas correcta y razónala brevemente. Los campos magnéticos no interaccionan con:

a) Imanes permanentes en reposo.
b) Imanes permanentes en movimiento.
c) Cargas eléctricas en reposo.
d) Cargas eléctricas en movimiento. (Solución: c))

27. Una carga puntual está en reposo en el origen de coordenadas, en una zona del espacio en la que existen un campo eléctrico y un campo magnético. Ambos son constantes y antiparalelos. Razona detalladamente cómo se moverá dicha partícula. (Solución: m.r.u.a.)

28. En una zona del espacio hay un campo magnético uniforme y estacionario de módulo $B = 0{,}25$ T actuando sobre un cable rectilíneo, colocado perpendicularmente a *B*, de longitud $L = 1{,}5$ m por el que circula una corriente eléctrica *I*. Sabiendo que la fuerza que hace el campo magnético sobre dicho cable es $F = 3{,}3$ N, calcula la corriente que circula por él. (Solución: $I = 8{,}8$ A)

29. Calcula el valor de la fuerza electromotriz inducida en una bobina que tiene 50 espiras si en cada una de dichas espiras el flujo magnético varía desde 100 Wb a 5 Wb en 0,2 s. (Solución: 23 750 V)

30. Dos cables paralelos de longitudes $L = 14$ m, separados una distancia $d = 0{,}1$ m se repelen el uno al otro con una fuerza $F = 2{,}1 \cdot 10^{-3}$ N. Sabiendo que por uno de los cables circula una corriente de 15 A, calcula la corriente que circula por el otro cable. Como $L \gg d$ podemos suponer que los cables son muy largos, prácticamente infinitos. (Dato: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A^2). (Solución: 5 A)

31. Dos cables paralelos de longitud 1 m, y transportando la misma corriente eléctrica $I = 2$ A, y en el mismo sentido se atraen con una fuerza de $2 \cdot 10^{-6}$ N. Calcula la distancia entre dichos cables. (Dato: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^7$ en el S.I.). (Solución: $d = 0{,}4$ m).

32. Observamos que un electrón recorre una circunferencia de radio $R = 1,4 \cdot 10^{-6}$ m con velocidad uniforme $v = 2\,800$ km/s en un plano perpendicular a un campo magnético responsable de ese movimiento. Calcula el módulo de dicho campo magnético. (Datos del electrón: $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C). (Solución: 11,4 T)

33. ¿Existe interacción magnética entre dos partículas cargadas? ¿Existe siempre interacción eléctrica entre ellas? Razona tu respuesta.

34. Dibuja un cable rectilíneo por el que circula una corriente eléctrica y dibuja también algunas líneas del campo magnético que crea.

35. Un cable rectilíneo de longitud $L = 0,5$ m transporta una corriente eléctrica $I = 2$ A. Este cable está colocado perpendicularmente a un campo magnético uniforme $B = 0,25$ T. Calcula el módulo de la fuerza que sufre dicho cable. (Solución: 0,25 N)

36. Un electrón con una velocidad de 3 000 km/s penetra perpendicularmente en una región del espacio en la que hay un campo magnético uniforme $B = 0,15$ T. Calcula el radio de la órbita que describe. (Datos del electrón: $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg; $e = 1,6 \cdot$ $\cdot\, 10^{-19}$ C). (Solución: $R = 1,14 \cdot 10^{-4}$ m)

37. Explica razonadamente en qué casos un campo magnético no ejerce ninguna fuerza sobre una partícula cargada.

38. Enuncia la ley de Faraday-Henry. Pon un ejemplo sencillo que sirva para explicarla.

39. Se tiene una aguja imantada en el campo magnético terrestre. Indica cómo se debe colocar un conductor rectilíneo e indefinido para que al hacer pasar una corriente por él, la aguja no se desvíe. ¿Y para que la desviación sea máxima? Razona la respuesta. (Solución: perpendicular y paralela respectivamente)

40. Un protón se desplaza con velocidad de $2 \cdot 10^{6}$ m/s y penetra en un campo magnético uniforme de intensidad 0,3 T, perpendicular al mismo. Calcula:

a) La fuerza que el campo magnético ejerce sobre el protón. (Solución: $9,6 \cdot$ $\cdot\, 10^{-14}$ N)

b) El radio de la trayectoria. (Solución: 0,07 m)

(Datos: $mp = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg; $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C).

41. Calcula el campo creado, por un conductor rectilíneo e infinito por el que circula una corriente de 4 A, en un punto situado a 0,2 m del conductor. Dibuja las líneas de fuerza y el vector campo en ese punto. (Solución: $4 \cdot 10^{-6}$ T)

42. Explica, con la ayuda de un diagrama, las fuerzas entre dos conductores rectilíneos y paralelos por los que circulan corrientes en sentidos contrarios.

43. Dos conductores rectilíneos y paralelos de 0,4 m de longitud, están separados 0,2 m entre sí. Hallar la fuerza con que se atraen si están recorridos por corrientes de 5 A y 8 A en el mismo sentido. (Dato: $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (T · m)/A). (Solución: $1,6 \cdot$ $\cdot\, 10^{-5}$ N)

44. Calcula la fuerza que actúa sobre un protón ($q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C) que se mueve con una velocidad $12 \cdot 10^{5}$ m/s en el sentido positivo del eje *OY*, en el interior de un campo magnético de 4 T dirigido en el sentido positivo del eje *OX*. ¿Cuál sería esa fuerza si en vez de un protón fuese un electrón? (Solución: $\vec{F} = 7,68 \cdot 10^{-13}\, \vec{K}$ N; $\vec{F} = -7,68 \cdot 10^{-13}\, \vec{K}$ N)

CUESTIONES Y EJERCICIOS RESUELTOS DE CAMPO MAGNÉTICO E INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

1 *Junio 92*

Elige la opción que creas correcta y razónala brevemente. El flujo magnético que atraviesa una espira, depende de:

a) El valor del campo magnético donde ha sido introducida.
b) El tamaño de la espira.
c) La posición que tiene ésta respecto del campo magnético.
d) Los tres factores anteriores.

El flujo magnético que atraviesa una espira, viene dado por el producto escalar del vector $\vec{B}$ por el vector superficie $\vec{S}$

$$\phi = B \cdot S \cdot \cos \alpha$$

siendo α el ángulo formado por $\vec{B}$ y $\vec{S}$.

De la expresión anterior se deduce que la *opción correcta es la d*).

2 *Junio 92*

Un protón de masa $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg y carga $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, se mueve dentro de un campo magnético de 0,003 T. ¿Cuál es la velocidad de este protón si su trayectoria es una circunferencia de radio $R = 0{,}2$ m en un plano perpendicular al campo magnético?

Un protón en movimiento en el interior de un campo magnético se ve sometido a una fuerza magnética que viene dada por la ley de Lorentz:

$$F = q \cdot v \cdot B \cdot \text{sen}\ \alpha$$

Aplicando la 2ª ley de Newton, y sustituyendo los datos que nos dan:

$$qvB = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow v = \frac{qBR}{m} = \boxed{57\,485 \text{ m/s}}$$

3 *Septiembre 92*

¿Qué fuerza ejerce un campo magnético uniforme y estacionario de 0,2 T sobre un conductor rectilíneo, perpendicular a él, de 30 cm de largo y por el que circula una corriente de 5 A?

La fuerza magnética sobre un conductor rectilíneo de longitud l por el que circula una corriente I situado en un campo magnético $\vec{B}$ es:

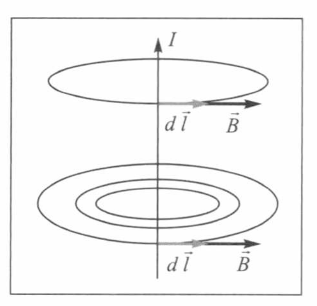
$$\vec{F} = I\,(\vec{l} \times \vec{B})$$

El módulo de esta fuerza al ser un producto vectorial vendrá dado por:

$$F = I \cdot l \cdot B \cdot \text{sen}\,\alpha = 5 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot \text{sen}\,90° = \boxed{0{,}3\ \text{N}}$$

4 *Septiembre 92*

Enuncia brevemente la ley de Ampère.



La circulación del campo magnético sobre cualquier curva cerrada es igual al producto de la permeabilidad μ_0 por la intensidad de corriente I que atraviesa la superficie limitada por la curva cerrada.

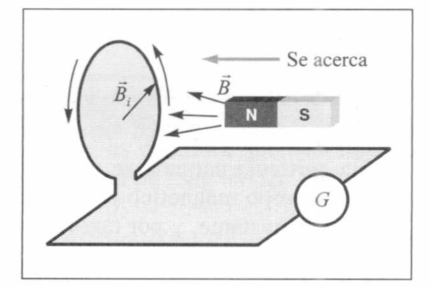
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I$$

5 *Junio 93*

Enuncia la ley de Lenz y pon un ejemplo en el que tengas que usarla.

Ley de Lenz: El sentido de la corriente inducida en un circuito es tal que se opone al aumento o disminución de flujo que la produce.

Por ejemplo, cuando acercamos el imán a una espira, aumenta el número de líneas de fuerza que atraviesa la superficie S. La corriente inducida en el circuito circula en el sentido, cuyo flujo creado por ella contrarreste el aumento de flujo creado.



6 *Septiembre 93*

Elige la opción que creas correcta y razónala brevemente. Un electrón entra en una zona del espacio en la que hay un campo magnético, con una velocidad paralela a dicho campo magnético. El electrón:

a) No se ve afectado.
b) cambia de dirección.
c) Cambia de velocidad.
d) Cambia de energía.

La fuerza magnética que actúa sobre una carga eléctrica en movimiento dentro de un campo magnético es:

$$F = q \cdot v \cdot B \cdot \text{sen}\,\alpha$$

siendo α el ángulo formado por el vector velocidad $\vec{v}$ y el vector inducción magnética $\vec{B}$.

$$\text{Si} \quad \alpha = 0^\circ, \quad \text{o bien} \quad \alpha = 180^\circ \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = 0 \Rightarrow F = 0 \text{ N}$$

Solución: *a) no se ve afectado.*

7 — *Junio 94*

Elige la opción que creas correcta y razónala brevemente. Una corriente inducida la podemos obtener:

a) Colocando un imán enfrente de una espira.
b) Colocando dos imanes cercanos.
c) Aproximando o alejando un imán a una espira.
d) Manteniendo fijo un imán dentro de una espira.

La fuerza electromotriz inducida ε en un circuito es igual a la variación del flujo magnético ϕ que lo atraviesa por unidad de tiempo.

$$\varepsilon = \frac{d\phi}{dt}$$

El flujo del vector $\vec{B}$ a través de la superficie $\vec{S}$ es igual al producto escalar de $\vec{B}$ por $\vec{S}$. $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$ y representa el número de líneas de fuerza que atraviesa la superficie $\vec{S}$.

Solamente existe variación de flujo debido al aumento o disminución de campo magnético, en el caso c).

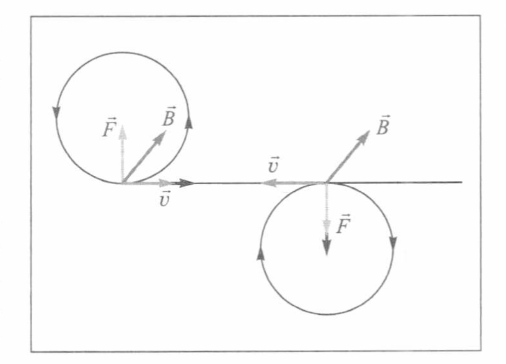
8 — *Junio 94*

Una partícula cargada se mueve recorriendo una circunferencia bajo la influencia de un campo magnético perpendicular al plano que contiene a la circunferencia. En un cierto instante, y por razones que no vamos a considerar, se invierte la velocidad de la partícula. ¿Recorrerá la misma circunferencia, girando en sentido contrario? Si la respuesta fuera no, dibuja la nueva trayectoria. Justifica tu respuesta.

La fuerza realizada sobre una carga eléctrica en movimiento en el interior de un campo magnético viene dada por ley de Lorentz:

$$\vec{F} = q\,(\vec{v} \times \vec{B})$$

La dirección y sentido de $\vec{F}$ viene dada por la regla del producto vectorial. Si se invierte la velocidad de la partícula, varía el sentido de la fuerza cómo se representa en la figura, *recorriendo la carga otra trayectoria diferente también circular.*



9 *Septiembre 94*

Se debe aplicar un par de fuerzas de $4 \cdot 10^{-3}$ N · m para mantener la aguja de una brújula formando un ángulo recto con el campo magnético terrestre, $B = 5 \cdot 10^{-5}$ T. ¿Cuánto vale el momento magnético de esa brújula?

El momento del par de fuerzas $\vec{M}$ que actúa sobre la aguja de una brújula de momento magnético $\vec{m}$ es:

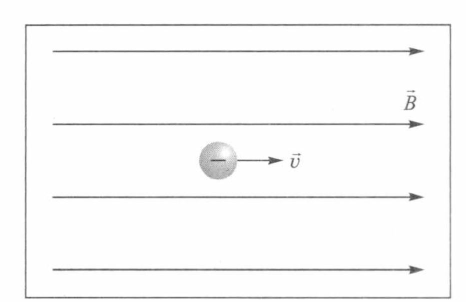
$$M = m \cdot B \cdot \text{sen}\ \alpha$$

siendo $\alpha = 90°$ ya que forma un ángulo recto con el campo magnético terrestre. Sustituyendo datos:

$$m = \frac{M}{B \cdot \text{sen}\ 90°} = \boxed{80\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{T}}}$$

10 *Septiembre 94*

Si un electrón atraviesa una región del espacio sin sufrir ninguna desviación, ¿podemos afirmar que en esa región no hay un campo magnético? De existir, ¿cómo tiene que ser? Razona tu respuesta.



La fuerza magnética que actúa sobre una carga eléctrica en el seno de un campo magnético viene dada por la ley de Lorentz:

$$\vec{F} = q\ (\vec{v} \times \vec{B})$$

Si $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son paralelos $\vec{F} = 0$, luego, si el electrón entra en un campo magnético sin sufrir desviación es debido a que su velocidad es paralela al campo magnético.

11 *Junio 95*

Un protón se mueve en un plano perpendicular a un campo magnético de 0,15 T y describe una trayectoria circular de 15 cm de radio. El protón tiene una masa de $1{,}7 \cdot 10^{-27}$ kg y una carga de $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C. ¿Cuál es la velocidad del protón?

Una partícula cargada que se introduce perpendicularmente en un campo magnético uniforme, describe un movimiento circular uniforme en el que la fuerza magnética proporciona la fuerza centrípeta necesaria.

$$qvB = \frac{mv^2}{R}$$

de donde:

$$v = \frac{qRB}{m} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}15}{1{,}7 \cdot 10^{-27}} = \boxed{2{,}1 \cdot 10^{6}\ \text{m/s}}$$

12 *Junio 95*

Un protón y un electrón ambos con la misma energía cinética, describen trayectorias circulares en una zona del espacio en la que existe un campo magnético uniforme, estacionario y perpendicular al plano que contiene ambas órbitas. ¿Cuál de las dos trayectorias tiene radio mayor?

Cómo hemos visto en la cuestión anterior, el radio de la trayectoria de cada una de las cargas viene dado por:

$$R_p = \frac{m_p\, v_p}{qB}; \qquad R_e = \frac{m_e\, v_e}{qB}$$

Si el protón y el electrón tienen la misma energía cinética resulta:

$$\frac{1}{2} m_p\, v_p^2 = \frac{1}{2} m_e\, v_e^2 \;\Rightarrow\; \frac{v_p}{v_e} = \sqrt{\frac{m_e}{m_p}}$$

Dividiendo el radio del protón entre el radio del electrón obtenemos:

$$\frac{R_p}{R_e} = \frac{m_p\, v_p}{m_e\, v_e} = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}} > 1$$

Luego *tiene radio mayor la trayectoria del protón.*

13 *Septiembre 95*

Consideramos una bobina compuesta por 800 espiras circulares, teniendo cada una de ellas una sección transversal de 20 cm^2. La bobina está colocada en un campo magnético uniforme de 0,5 T. Giramos la bobina 90º desde una orientación paralela al campo hasta otra orientación perpendicular al campo. Si tardamos 0,4 s en girarla, ¿cuánto vale el módulo de la fuerza electromotriz media inducida en dicha bobina?

La fuerza electromotriz inducida ε en un circuito se debe a la variación del flujo magnético.

$$\varepsilon = -N\,\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

El flujo del vector $\vec{B}$ a través de la superficie $\vec{S}$ es:

$$\phi = B \cdot S \cdot \cos\alpha$$

Calculamos los flujos inicial y final con los datos del problema:

$$\phi_i = B \cdot S \cdot \cos 90^\circ = 0$$

$$\phi_f = B \cdot S \cdot \cos 0^\circ = 0{,}5 \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot 1 = 10^{-3}\ \text{Wb}$$

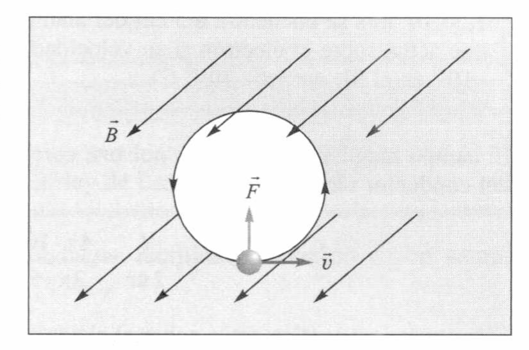
Sustituyendo en la ley de Faraday-Lenz y fijándonos solamente en el módulo:

$$\varepsilon = 800\,\frac{10^{-3}}{0{,}4} = \boxed{2\ \text{V}}$$

14 *Septiembre 95*

Un electrón penetra por la izquierda con velocidad v_0 paralela al plano del papel en el que escribes. En la zona del espacio delimitada por tu papel hay un campo magnético B uniforme, perpendicular al plano del papel y dirigido hacia arriba. Dibuja la trayectoria que sigue el electrón.

Sobre el electrón actúa una fuerza $\vec{F} = q\,(\vec{v} \times \vec{B})$ de dirección y sentido el indicado por la regla del producto vectorial. Al ser q negativa la trayectoria es la siguiente:



15 *Junio 96*

Una carga eléctrica puede experimentar fuerzas eléctricas y magnéticas. ¿Cómo puedes distinguir si la fuerza que hace que una carga se desvíe de la trayectoria recta es de origen eléctrico o magnético?

Al penetrar *una carga eléctrica en el interior de un campo eléctrico*, se ve sometida a una fuerza.

$$\vec{F}_e = q\vec{E}$$

La carga eléctrica puede desviarse de la trayectoria original, pero a medida que transcurre el tiempo *tenderá a orientarse en la dirección del campo*.

Los efectos que produce *sobre una carga q que entra en el seno de un campo magnético* con velocidad v cualquiera, es la de aparecer *una fuerza perpendicular a su velocidad que curvará su trayectoria*.

En el caso particular de que v sea perpendicular al campo, actuará sobre la partícula una fuerza centrípeta que la obligará a realizar un movimiento circular uniforme en un plano perpendicular a la dirección del campo. Llamando R al radio de la órbita, y aplicando la 2ª ley de Newton resulta:

$$|\vec{F}| = \frac{mv^2}{R}$$

y sustituyendo el valor de la fuerza magnética queda:

$$qvB = \frac{mv^2}{R}$$

Despejando el valor del radio de la circunferencia obtenemos:

$$R = \frac{mv}{qB}$$

16 *Junio 96*

Un alambre recto y largo transporta una corriente de 50 A. Un electrón que viaja a $1{,}5 \cdot 10^7$ m/s se encuentra a 5 cm del alambre. ¿Cuánto vale el módulo de la fuerza que actúa sobre el electrón si su velocidad es paralela al alambre? (Datos: $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$ en el SI; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C).

El campo magnético producido por una corriente rectilínea indefinida a una distancia r del conductor viene dada por:

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 50}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^{-2}} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

Este campo magnético actúa sobre el electrón, ejerciendo una fuerza magnética que viene dada por la ley de Lorentz:

$$F = qvB \text{ sen } 90 = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}5 \cdot 10^7 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = \boxed{4{,}8 \cdot 10^{-16} \text{ N}}$$

17 *Septiembre 96*

Por un conductor rectilíneo, dirigido a lo largo OY, circula en el sentido positivo del mencionado eje, una corriente eléctrica $I = 20$ A. Calcula el vector que nos da la fuerza, por unidad de longitud, que sobre este conductor ejerce el siguiente campo magnético, $\vec{B} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$ T.

Al ser $\vec{B} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$ un campo magnético uniforme, la fuerza realizada sobre un conductor rectilíneo de longitud $\vec{l} = 1\vec{j}$ es:

$$\vec{F} = I\,(\vec{l} \times \vec{B}) = 20 \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \boxed{60\vec{i} - 40\vec{k} \text{ N}}$$

La fuerza $\vec{F}$ es siempre perpendicular al campo magnético y a la dirección de la corriente.

18 *Septiembre 96*

Un electrón describe una órbita circular con velocidad $v = 5 \cdot 10^8$ m/s dentro de un campo magnético de valor $B = 2 \cdot 10^{-2}$ T. ¿Cuánto vale el módulo de la fuerza que experimenta el electrón? (Datos: $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C).

Una carga q que se mueve con velocidad $\vec{v}$ en el seno de un campo magnético $\vec{B}$ se ve sometida a la acción de una fuerza $\vec{F}$ denominada fuerza de Lorentz, de valor:

$$F = q \cdot v \cdot B \cdot \text{sen}\, \alpha$$

Si describe una órbita circular $\vec{v}$ y $\vec{B}$ forman 90°, siendo el sen $\alpha = 1$. Sustituyendo datos se deduce:

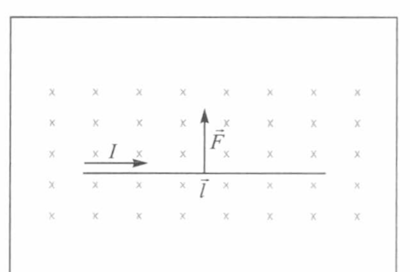
$$F = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{8} \cdot 2 \cdot 10^{-2} = \boxed{1{,}6 \cdot 10^{-12}\ \text{N}}$$

19 *Junio 97*

La acción de un campo magnético sobre un conductor por el que circula una corriente viene descrita por la denominada 2° ley de Laplace. Enúnciala.

La figura representa una porción l de conductor rectilíneo contenido en un campo magnético $\vec{B}$ de inducción.

Por el conductor pasa una corriente I.



La fuerza que ejerce un campo magnético sobre un conductor rectilíneo depende de la intensidad de corriente, de la longitud del conductor, de la inducción magnética y del ángulo que forma el conductor con el campo magnético:

$$F = IlB \text{ sen}\, \alpha$$

En forma vectorial:

$$\vec{F} = I\,(\vec{l} \times \vec{B}) \qquad \textit{Ley de Laplace}$$

20 *Junio 97*

Un campo magnético de 0,3 T perpendicular al plano del papel es responsable de que una partícula de masa 10^{-8} kg recorra una circunferencia de radio 0,4 m con una velocidad de 120 m/s de módulo constante. Calcula la carga que tiene dicha partícula.

Una carga que entra en un campo magnético con una velocidad perpendicular al campo, la fuerza de Lorentz le obligará a seguir un movimiento circular uniforme.

La fuerza centrípeta que actúa sobre la carga es justamente la fuerza de Lorentz.

$$q \cdot v \cdot B = m\frac{v^2}{R}$$

Despejando q obtenemos:

$$q = \frac{mv}{BR} = \frac{10^{-8} \cdot 120}{0{,}3 \cdot 0{,}4} = \boxed{10^{-5}\ \text{C}}$$

21

Septiembre 97

Por un alambre de 5 m de largo circula una corriente de 1,5 A en una zona del espacio en la que hay un campo magnético uniforme y estacionario. El alambre sufre una fuerza de 2,77 N cuando forma un ángulo de 38° con el campo magnético. Calcula la magnitud de dicho campo magnético.

La fuerza magnética sobre un conductor rectilíneo de longitud l por el que circula una corriente I en un campo magnético $\vec{B}$ es:

$$\vec{F} = I\,(\vec{l} \times \vec{B})$$

siendo el módulo de esta fuerza:

$$F = I \cdot l \cdot B \cdot \text{sen}\,\alpha$$

Despejando en la expresión anterior y sustituyendo los datos obtenemos:

$$B = \frac{F}{I \cdot l \cdot \text{sen}\,\alpha} = \frac{2{,}77}{1{,}5 \cdot 5 \cdot \text{sen}\,38} = \boxed{0{,}6\ \text{T}}$$

22

Septiembre 97

Elige la opción que creas correcta y razónala brevemente. Se lanza un protón dentro de una región del espacio en la que existe un campo magnético uniforme. El protón no se desviará de su trayectoria si su velocidad:

a) Es perpendicular al campo magnético.
b) Es paralela al campo magnético.
c) Forma un ángulo de 45° con las líneas del campo magnético.
d) Es igual a la de propagación del sonido en el aire a $T = 25$ °C.

La fuerza que actúa sobre una carga eléctrica en un espacio donde existe un campo magnético, viene dada por la ley de Lorentz.

$$\vec{F} = q\,(\vec{v} \times \vec{B})$$

Si el protón se introduce en el campo con una velocidad $\vec{v}$ paralela a la inducción magnética $\vec{B}$, la fuerza que actuará sobre el protón será nula:

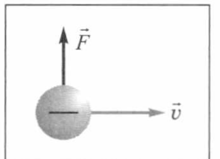
$$F = qvB\ \text{sen}\ 0° = \boxed{0\ \text{N}}$$

Solución: b)

23

Junio 98 - 1 punto

Un electrón se mueve por la parte positiva del eje OX, hacia las X crecientes, con una velocidad uniforme de $5 \cdot 10^5$ m/s. Dicho electrón experimenta una fuerza de $4 \cdot 10^{-14}$ N hacia la parte positiva del eje OY. Calcula la magnitud, dirección y sentido del campo magnético responsable de esa fuerza. (Dato: El valor absoluto de la carga del electrón es $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C).



Un electrón al moverse hacia la parte positiva del eje OX hacia las X crecientes su velocidad será $\vec{v} = 5 \cdot 10^5\,\vec{i}$. Si experimenta una fuerza hacia la parte positiva del eje OY, $\vec{F} = 4 \cdot 10^{-14}\,\vec{j}$ N.

Aplicando la ley de Lorent y utilizando el cálculo vectorial obtenemos:

$$\vec{F} = q\,(\vec{v} \times \vec{B}) \;\Rightarrow\; 4 \cdot 10^{-14}\,\vec{j} = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Resolviendo la ecuación anterior resulta:

$$4 \cdot 10^{-14} = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^5 \cdot B \;\Rightarrow\; B_z = 0{,}5 \text{ T}$$

Expresado en forma vectorial queda:

$$\boxed{\vec{B} = 0{,}5\,\vec{k} \text{ T}}$$

24 *Junio 98 - 1 punto*

Una partícula de masa m, carga q y velocidad v se mueve en una región del espacio en la que actúan un campo eléctrico y un campo magnético. Escribe y comenta un poco la expresión que nos permite averiguar la fuerza total que actúa sobre dicha partícula.

Si una carga q se mueve en una región en la que actúan un campo eléctrico y un campo magnético, se verá sometida simultáneamente a dos tipos de fuerza, una de origen eléctrico $q\vec{E}$ y otra de origen magnético $q\,(\vec{v} \times \vec{B})$, aplicando el principio de superposición, la suma vectorial de las dos fuerzas será la fuerza resultante:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\,(\vec{v} + \vec{B}) = q\,\left(\vec{E} + (\vec{v} + \vec{B})\right)$$

llamada fuerza de Lorentz

25 *Septiembre 98 - 1 punto*

Escribe las tres expresiones que nos permiten expresar, en lenguaje matemático, la acción que un campo magnético ejerce sobre: una carga en movimiento, una corriente rectilínea y una espira respectivamente.

a) La fuerza que actúa sobre una carga eléctrica en un espacio donde existe un campo magnético, viene dada por la ley de Lorentz.

$$\vec{F} = q\,(\vec{v} \times \vec{B})$$

b) La fuerza magnética sobre un conductor rectilíneo de longitud l por el que circula una corriente I en un campo magnético $\vec{B}$ es:

$$\vec{F} = I\,(\vec{l} \times \vec{B})$$

c) El momento del par de fuerzas $\vec{M}$ que actúa sobre una espira de momento magnético $\vec{m}$ es:

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

26 *Septiembre 98 - 1 punto*

Elige la opción que creas correcta y razónala brevemente. Los campos magnéticos no interaccionan con:

a) Imanes permanentes en reposo.
b) Imanes permanentes en movimiento.
c) Cargas eléctricas en reposo.
d) Cargas eléctricas en movimiento.

Si una partícula de carga eléctrica q, se introduce en una región del espacio en la que actúa un campo magnético, se ve sometida a una fuerza magnética o fuerza de Lorentz.

$$\vec{F} = q\,(\vec{v} \times \vec{B})$$

Si la carga eléctrica se encuentra en reposo:

$$\vec{v} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{F} = \boxed{0\ \mathrm{N}}$$

Por tanto, la *solución es c)*.

27 *Junio 99 - 1 punto*

Una carga puntual está en reposo en el origen de coordenadas, en una zona del espacio en la que existen un campo eléctrico y un campo magnético. Ambos son constantes y antiparalelos. Razona detalladamente cómo se moverá dicha partícula.

La carga sólo sufre la acción del campo eléctrico $\vec{E}$ comunicándole una fuerza de valor:

$$F_e = q \cdot \vec{E}$$

Al estar la carga en reposo, se movería *en la dirección del campo eléctrico con movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.*

Como la velocidad de la carga es antiparalela a $\vec{B}$, la fuerza realizada por el campo magnético sobre dicha carga sería nula.

$$\vec{F} = q\,(\vec{v} \times \vec{B}) = 0\ \mathrm{N}$$

28 *Junio 99 - 1 punto*

En una zona del espacio hay un campo magnético uniforme y estacionario de módulo $B = 0{,}25$ T actuando sobre un cable rectilíneo, colocado perpendicularmente a

B, de longitud $L = 1{,}5$ m por el que circula una corriente eléctrica I. Sabiendo que la fuerza que hace el campo magnético sobre dicho cable es $F = 3{,}3$ N, calcula la corriente que circula por él.

Aplicando la 2ª ley de Laplace podemos deducir la acción de un campo magnético sobre un conductor rectilíneo por el que circula una corriente

La fuerza que ejerce un campo magnético sobre un conductor rectilíneo depende de la intensidad de corriente, de la longitud del conductor, de la inducción magnética y del ángulo que forma el conductor con el campo magnético:

$$F = IlB \text{ sen } \alpha$$

Despejando y sustituyendo los datos que nos dan se obtiene un valor para I:

$$I = \frac{F}{lB \text{ sen } \alpha} = \frac{3{,}3}{1{,}5 \cdot 0{,}25} = \boxed{8{,}8 \text{ A}}$$

29

Septiembre 99 - 1 punto

Calcula el valor de la fuerza electromotriz inducida en una bobina que tiene 50 espiras si en cada una de dichas espiras el flujo magnético varía desde 100 Wb a 5 Wb en 0,2 s.

La fuerza electromotriz inducida ε en un circuito es igual a la variación del flujo magnético ϕ, que lo atraviesa por unidad de tiempo (ley de Faraday-Henry).

$$\varepsilon = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

Si es una bobina con N espiras, la fuerza electromotriz vendrá dada por:

$$\varepsilon = N\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

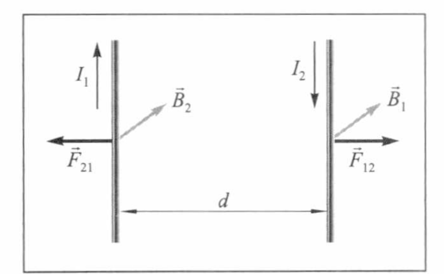
Sustituyendo los datos que nos dan resulta:

$$\varepsilon = 50\,\frac{100 - 5}{0{,}2} = \boxed{23\,750 \text{ V}}$$

30

Septiembre 99

Dos cables paralelos de longitudes $L = 14$ m, separados una distancia $d = 0{,}1$ m se repelen el uno al otro con una fuerza $F = 2{,}1 \cdot 10^{-3}$ N. Sabiendo que por uno de los cables circula una corriente de 15 A, calcula la corriente que circula por el otro cable. Como $L \gg d$ podemos suponer que los cables son muy largos, prácticamente infinitos. (Dato: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A^2).



Supongamos dos conductores rectilíneos y paralelos separados una distancia d y por los que pasan corrientes I_1, I_2 en sentidos opuestos.

Conductor 1. Este conductor crea un campo magnético en el punto P_2 donde se concentra el conductor 2 que vale:

$$B_1 = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot d}$$

Este campo ejerce una fuerza sobre el conductor 2 que viene dado por:

$$F_{12} = I_2 \cdot l_2 \cdot B_1 = \left(\frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi \cdot d} \right) \cdot l_2$$

Conductor 2. Este conductor crea un campo magnético en el punto P_1 donde se encuentra el conductor 1 que vale:

$$B_2 = \frac{\mu_0 \cdot I_2}{2\pi \cdot d}$$

Este campo ejerce una fuerza sobre el conductor 1 que viene dado por:

$$F_{21} = I_1 \cdot l_1 \cdot B_2 = \left(\frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi \cdot d} \right) \cdot l_1$$

Estas dos fuerzas F_{12} y F_{21} tienen la misma dirección pero sentido opuesto.

Sustituyendo los datos que nos dan:

$$I_2 = \frac{F \cdot 2\pi \cdot d}{\mu_0 \cdot I_1 \cdot l_1} = \frac{2{,}1 \cdot 10^{-3} \cdot 2\pi \cdot 0{,}1}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 15 \cdot 14} = \boxed{5\ \text{A}}$$

31 *Junio 97 - 1,25 puntos*

Dos cables paralelos de longitud 1 m, y transportando la misma corriente eléctrica $I = 2$ A, y en el mismo sentido se atraen con una fuerza de $2 \cdot 10^{-6}$ N. Calcula la distancia entre dichos cables. (Dato: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{7}$ en el S.I.).

Supongamos dos conductores rectilíneos y paralelos separados una distancia d y por los que pasan corrientes I_1, I_2 en el mismo sentido.

Conductor 1. Este conductor crea un campo magnético en el punto P_2 donde se concentra el conductor 2 que vale:

$$B_1 = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot d}$$

Este campo ejerce una fuerza sobre el conductor 2 que viene dado por:

$$F_{12} = I_2 \cdot l_2 \cdot B_1 = \left(\frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi \cdot d} \right) \cdot l_2$$

Aplicando esta ecuación a nuestro problema resulta una distancia entre cables de:

$$d = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot l_2}{2\pi \cdot F} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = \boxed{0{,}4 \text{ m}}$$

32 *Junio 97 - 1,25 puntos*

Observamos que un electrón recorre una circunferencia de radio $R = 1{,}4 \cdot 10^{-6}$ m con velocidad uniforme $v = 2\,800$ km/s en un plano perpendicular a un campo magnético responsable de ese movimiento. Calcula el módulo de dicho campo magnético. (Datos del electrón: $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C).

Una partícula eléctrica que penetra perpendicularmente a las líneas de fuerza de un campo magnético uniforme describe un movimiento circular.

Si una carga q negativa penetra perpendicularmente en un campo magnético con una velocidad v, estará sometida a una fuerza F perpendicular a la velocidad v y a la inducción magnética B.

Aplicando la 2ª ley de Newton: Fuerza centrípeta igual a la fuerza magnética, se tiene:

$$q \cdot v \cdot B = \frac{mv^2}{R} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{m \cdot v}{q \cdot R}$$

Sustituyendo los datos del ejercicio resulta un valor del campo magnético igual a:

$$B = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 2\,800\,000}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-6}} = \boxed{11{,}4 \text{ T}}$$

33 *Septiembre 97 - 1,25 puntos*

¿Existe interacción magnética entre dos partículas cargadas? ¿Existe siempre interacción eléctrica entre ellas? Razona tu respuesta.

Las cargas eléctricas en movimiento producen campos magnéticos. Si una carga se introduce en el interior de un campo magnético con una velocidad $\vec{v}$, se ve sometida a una fuerza que viene dada por la ley de Lorentz:

$$\vec{F} = q\,(\vec{v} \times \vec{B})$$

1ª Conclusión: Existe interacción magnética entre dos cargas, si las dos partículas se encuentran en movimiento.

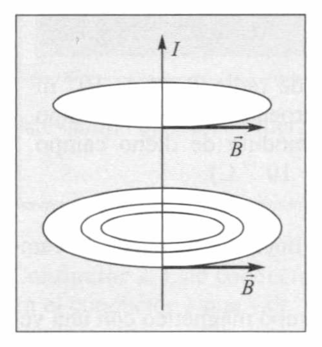
La fuerza entre dos cargas eléctricas puntuales q_1 y q_2 es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional a la distancia que las separa (Ley de Coulomb).

$$\vec{F} = K \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \vec{u}$$

2ª Conclusión: Siempre existe interacción eléctrica entre dos partículas cargadas.

34 *Septiembre 97 - 1,25 puntos*

Dibuja un cable rectilíneo por el que circula una corriente eléctrica y dibuja también algunas líneas del campo magnético que crea.



Las líneas de fuerza de campo magnético creado por un conductor rectilíneo por el que circula una corriente son circunferencias concéntricas de centro el conductor.

35 *Junio 98 - 1,25 puntos*

Un cable rectilíneo de longitud $L = 0{,}5$ m transporta una corriente eléctrica $I = 2$ A. Este cable está colocado perpendicularmente a un campo magnético uniforme $B = 0{,}25$ T. Calcula el módulo de la fuerza que sufre dicho cable.

La fuerza que ejerce un campo magnético sobre un conductor rectilíneo depende de la intensidad de corriente, de la longitud del conductor, de la inducción magnética y del ángulo que forma el conductor con el campo magnético:

$$F = IlB \text{ sen } a$$

Al estar colocado el cable perpendicularmente al campo magnético el ángulo que forma con el campo magnético será de 90° y la fuerza resultante obtenida es de:

$$F = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}25 = \boxed{0{,}25 \text{ N}}$$

36 *Junio 98 - 1,25 puntos*

Un electrón con una velocidad de 3 000 km/s penetra perpendicularmente en una región del espacio en la que hay un campo magnético uniforme $B = 0{,}15$ T. Calcula el radio de la órbita que describe. (Datos del electrón: $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $e = 1{,}6 \cdot \cdot 10^{-19}$ C).

Una partícula eléctrica que penetra perpendicularmente a las líneas de fuerza de un campo magnético uniforme toma un movimiento circular.

El electrón se verá sometido a un fuerza magnética perpendicular a la dirección de su movimiento que actuará de fuerza centrípeto.

$$qvB = m\frac{v^2}{R}$$

De donde se deduce el radio de la circunferencia que describe la partícula:

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 3\,000\,000}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}15} = \boxed{1{,}14 \cdot 10^{-4}\ \text{m}}$$

37

Septiembre 98 - 1,25 puntos

Explica razonadamente en qué casos un campo magnético no ejerce ninguna fuerza sobre una partícula cargada.

La fuerza ejercida por un campo magnético sobre una carga que se mueve perpendicularmente a las líneas de fuerza es igual al producto de la inducción magnética B, la carga y la velocidad.

La dirección y sentido de la fuerza que actúa sobre la carga móvil viene dada por la regla de la mano izquierda. El dedo corazón señala el sentido de la velocidad, el índice el sentido de la línea de fuerza y el pulgar el sentido de la fuerza que actúa sobre la carga en movimiento.

En general si la carga se mueve formando un ángulo α con la dirección del campo, el valor de la fuerza es:

$$\vec{F} = q\,(\vec{v} \times \vec{B})$$

Siendo el módulo de: $F = q \cdot v \cdot B \cdot \text{sen}\,\alpha$

Expresión matemática que recibe el nombre de *Ley de Lorentz*.

Un campo magnético no ejerce ninguna fuerza sobre una partícula cargada en los siguientes casos:

1º) Si la carga está en reposo $v = 0$ y F será igual a cero.

2º) Si la carga se mueve en la dirección del campo sen $\alpha = 0$ y F se anulará.

38

Septiembre 98 - 1,25 puntos

Enuncia la ley de Faraday-Henry. Pon un ejemplo sencillo que sirva para explicarla.

La fuerza electromotriz inducida ε en un circuito es igual a la variación del flujo magnético ϕ, que lo atraviesa por unidad de tiempo (ley de Faraday-Henry).

$$\varepsilon = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

Si es una bobina con N espiras, la fuerza electromotriz vendrá dada por:

$$\varepsilon = N\,\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

Ejemplo: Calcula el valor de la fuerza electromotriz inducida en una bobina que tiene 50 espiras si en cada una de dichas espiras el flujo magnético varía desde 100 Wb a 5 Wb en 0,2 s.

Sustituyendo los datos:

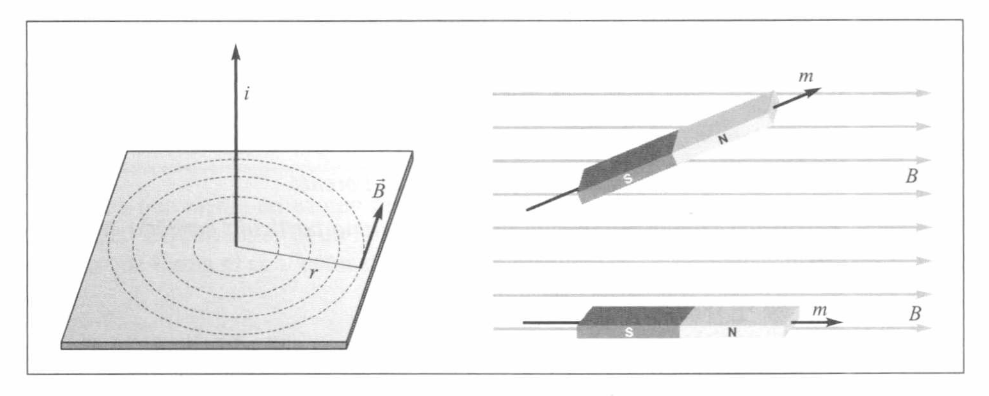
$$\varepsilon = 50 \frac{100 - 5}{0{,}2} = \boxed{23\,750 \text{ V}}$$

39 *Junio 99 - 1,25 puntos*

Se tiene una aguja imantada en el campo magnético terrestre. Indica cómo se debe colocar un conductor rectilíneo e indefinido para que al hacer pasar una corriente por él, la aguja no se desvíe. ¿Y para que la desviación sea máxima? Razona la respuesta.

Al igual que los campos eléctricos los campos magnéticos se pueden materializar mediante líneas de fuerza, que pueden presentar distintas formas según el agente creador del campo.

Ejemplo: Las líneas de fuerza de campo magnético creado por un conductor rectilíneo por el que circula una corriente son circunferencias con centro el conductor.



El momento de un par de fuerzas que actúa sobre una espira de momento magnético $\vec{m}$ es:

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

Si en lugar de una espita es una bobina de N espiras su momento magnético es:

$$\vec{m} = NI\vec{S}$$

El momento es nulo cuando sen $\alpha = 0$. *Esto ocurre cuando la espira se coloca perpendicularmente al campo magnético.*

Lo mismo sucederá al situar un imán en el interior de un campo magnético, pues el imán puede considerarse equivalente a una bobina. Si definimos el momento magnético del imán $\vec{m}$, como un vector que sale del polo norte y cuyo valor se corresponde con el de una bobina que produjese, los mismo efectos, éste se orientará de forma que su momento magnético se alinee con el campo.

Por tanto, para que no se desvíe se tendrá que colocar perpendicular al conductor, y para que la desviación sea máxima paralelo a él.

40 *Septiembre 99 - 1,25 puntos*

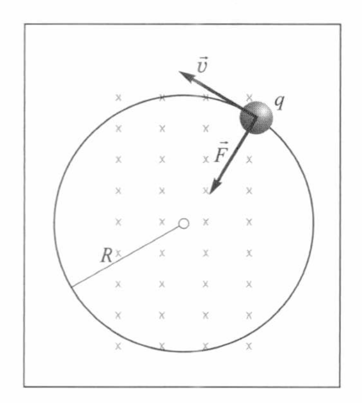
Un protón se desplaza con velocidad de $2 \cdot 10^6$ m/s y penetra en un campo magnético uniforme de intensidad 0,3 T, perpendicular al mismo. Calcula:

a) La fuerza que el campo magnético ejerce sobre el protón.
b) El radio de la trayectoria.

(Datos: $mp = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg; $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C).

a) Una partícula eléctrica que penetra perpendicularmente a las líneas de fuerza de un campo magnético uniforme describe un movimiento circular.

Si una carga q positiva penetra perpendicularmente en un campo magnético con una velocidad $\vec{v}$, estará sometida a una fuerza $\vec{F}$ perpendicular a la velocidad $\vec{v}$ y a la inducción magnética $\vec{B}$, y en nuestro caso, estará contenida en el plano del papel dirigiéndose hacia el centro de la circunferencia.



$$F = qvB = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 3 = \boxed{9{,}6 \cdot 10^{-14}\ \text{N}}$$

b) Aplicando la 2ª ley de Newton: Fuerza centrípeta igual a la fuerza magnética, se tiene:

$$q \cdot v \cdot B = \frac{mv^2}{R} \quad \Rightarrow$$

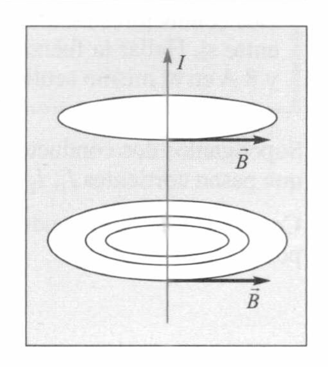
$$\Rightarrow \quad R = \frac{m \cdot v}{q \cdot B} = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 2 \cdot 10^6}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}3} = \boxed{0{,}07\ \text{m}}$$

El radio de la trayectoria es proporcional a la cantidad de movimiento de la partícula e inversamente proporcional a la carga y a la inducción magnética.

41 *Junio 2000 - 1,25 puntos*

Calcula el campo creado, por un conductor rectilíneo e infinito por el que circula una corriente de 4 A, en un punto situado a 0,2 m del conductor. Dibuja las líneas de fuerza y el vector campo en ese punto.

Un conductor rectilíneo crea un campo magnético, cuyas líneas de fuerza son circunferencias con centro el conductor y cuya inducción magnética en un punto situado a una distancia r del mismo viene dada por:



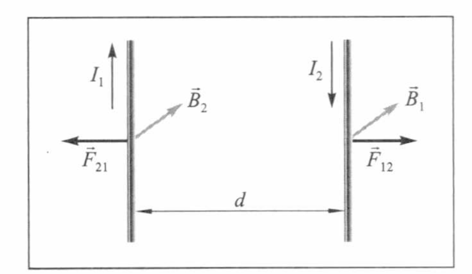
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I \quad \Rightarrow \quad B \oint d\vec{l} = \mu_0 \cdot I$$

$$B \cdot l = \mu_0 \cdot I \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4}{2\pi \cdot 0{,}2} = \boxed{4 \cdot 10^{-6}\ \text{T}}$$

42 *Junio 2000 - 1,25 puntos*

Explica, con la ayuda de un diagrama, las fuerzas entre dos conductores rectilíneos y paralelos por los que circulan corrientes en sentidos contrarios.

Supongamos dos conductores rectilíneos y paralelos separados una distancia d y por los que pasan corrientes I_1, I_2 en sentidos contrarios.



Conductor 1. Este conductor crea un campo magnético en el punto P_2 donde se concentra el conductor 2 que vale:

$$B_1 = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot d}$$

Este campo ejerce una fuerza sobre el conductor 2 que viene dado por:

$$F_{12} = I_2 \cdot l_2 \cdot B_1 = \left(\frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi \cdot d} \right) \cdot l_2$$

Conductor 2. Este conductor crea un campo magnético en el punto P_1 donde se encuentra el conductor 1 que vale:

$$B_2 = \frac{\mu_0 \cdot I_2}{2\pi \cdot d}$$

Este campo ejerce una fuerza sobre el conductor 1 que viene dado por:

$$F_{21} = I_1 \cdot l_1 \cdot B_2 = \left(\frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi \cdot d} \right) \cdot l_1$$

Estas dos fuerzas F_{12} y F_{21} tienen la misma dirección pero sentido opuesto.

De donde se deduce: *Dos conductores por los que circulan corrientes en sentido contrario se repelen.*

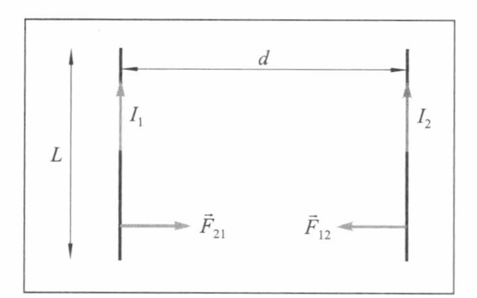
43 *Septiembre 2000 - 1,25 puntos*

Dos conductores rectilíneos y paralelos de 0,4 m de longitud, están separados 0,2 m entre sí. Hallar la fuerza con que se atraen si están recorridos por corrientes de 5 A y 8 A en el mismo sentido. (Dato: $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (T · m)/A).

Supongamos dos conductores rectilíneos y paralelos separados una distancia d y por los que pasan corrientes I_1, I_2 en el mismo sentido.

Conductor 1. Este conductor ejerce una fuerza sobre el conductor 2 que viene dado por:

$$F_{12} = I_2 \cdot l_2 \cdot B_1 = \left(\frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi \cdot d} \right) \cdot l_2$$



Conductor 2. Este conductor ejerce una fuerza sobre el conductor 1 que viene dado por:

$$F_{21} = I_1 \cdot l_1 \cdot B_2 = \left(\frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi \cdot d} \right) \cdot l_1$$

Estas dos fuerzas F_{12} y F_{21} tienen la misma dirección pero sentido opuesto.

$$\boxed{F_{12} = F_{21} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 8 \cdot 0{,}4}{2\pi \cdot 0{,}2} 1{,}5 \cdot 10^{-5} \text{ N}}$$

44 *Septiembre 2000 - 1,25 puntos*

Calcula la fuerza que actúa sobre un protón ($q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C) que se mueve con una velocidad $12 \cdot 10^5$ m/s en el sentido positivo del eje *OY*, en el interior de un campo magnético de 4 T dirigido en el sentido positivo del eje *OX*. ¿Cuál sería esa fuerza si en vez de un protón fuese un electrón?

En general si una carga se mueve formando un ángulo α con la dirección del campo, el valor de la fuerza es:

$$\vec{F} = q\,(\vec{v} \times \vec{B})$$

Expresión matemática que recibe el nombre de *Ley de Lorentz*.

Expresando la velocidad de la carga y el campo magnético en forma vectorial resulta:

$$\boxed{\vec{F} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,(12 \cdot 10^5\,\vec{i} \times 4\,\vec{j}) = 7{,}68 \cdot 10^{-13}\,\vec{k}\text{ N}}$$

En el caso de que fuera la carga un electrón en lugar de un protón, la dirección y el módulo de $\vec{F}$ serían los mismos y únicamente su sentido sería el contrario

$$\boxed{\vec{F} = -\,7{,}68 \cdot 10^{-13}\,\vec{K}\text{ N}}$$

TEMA 6

FÍSICA CUÁNTICA

RESUMEN TEÓRICO DEL TEMA

1. Radiación térmica. Espectro electromagnético

La energía electromagnética que emite un cuerpo debido a su temperatura se denomina **radiación térmica**.

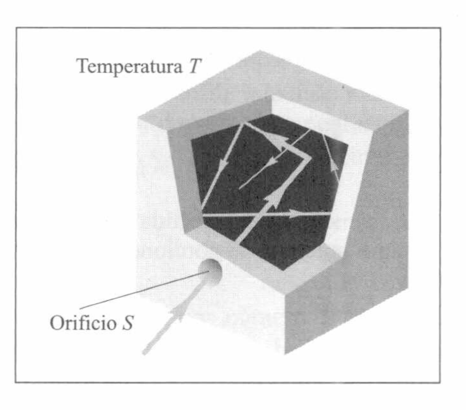
Se denomina espectro electromagnético al conjunto de todas las ondas electromagnéticas. En él se diferencian varias zonas.

	Frecuencia	Aplicación
• Ondas de radio	$1 - 3 \cdot 10^{8}$ Hz	Telecomunicaciones.
• Microondas	$3 \cdot 10^{8} - 3 \cdot 10^{12}$ Hz	Hornos, radar.
• Infrarrojos	$3 \cdot 10^{12} - 3 \cdot 10^{14}$ Hz	Lo emiten los cuerpos calientes.
• Luz visible	$4 \cdot 10^{14} - 7 \cdot 10^{14}$ Hz	Rojo, naranja amarillo, verde, azul y violeta.
• Ultravioleta	$7 \cdot 10^{14} - 1 \cdot 10^{17}$ Hz	Se debe a electrones acelerados en los átomos y moléculas.
• Rayos X	$1 \cdot 10^{17} - 3 \cdot 10^{19}$ Hz	Son originados por los electrones más internos.
• Rayos gamma	mayor que $3 \cdot 10^{19}$ Hz	Tienen su origen en el núcleo atómico.

2. Cuerpo negro

En Física se conoce cuerpo negro aquel que es capaz de absorber todas las radiaciones que llegan a él y, por tanto, de emitir todas las frecuencias. Su espectro es continuo.

Aunque no se conoce ningún cuerpo que se comporte rigurosamente como "negro" una cavidad con un pequeño orificio en una de sus paredes y con las paredes interiores pintadas de negro; cualquier radiación rebota hasta ser absorbida.

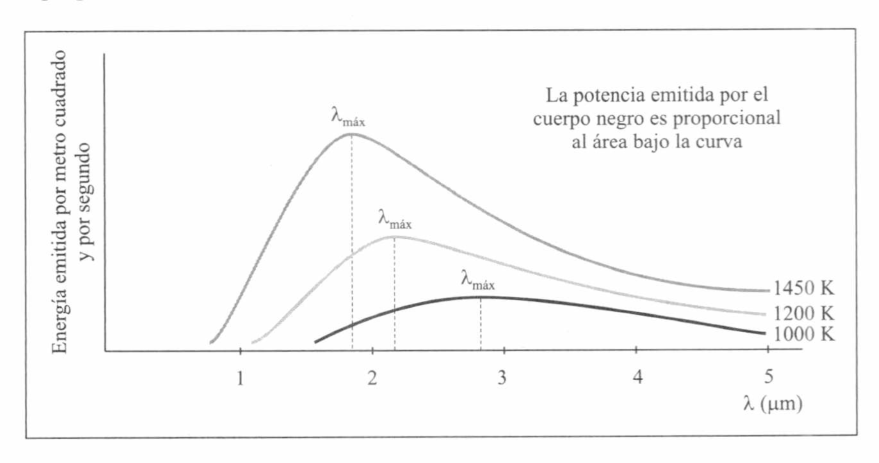


La radiación térmica de los cuerpos negros sólo depende de su temperatura y no de su composición, presentando las siguientes características:

Ley de Wien

$$\lambda_{\text{máx}} \cdot T = 2{,}897755 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{k}$$

La longitud de onda $\lambda_{\text{máx}}$ para la que se produce mayor emisión de energía es inversamente proporcional a la temperatura T.



Ley de Stefan-Boltzmann

La potencia total emitida por un cuerpo negro a una temperatura determinada por una superficie S, es proporcional a la cuarta potencia de su temperatura absoluta.

$$P = \sigma \cdot T^4 \cdot S\,; \qquad \text{siendo} \qquad \sigma = 5{,}6703 \cdot 10^{-8}\ \text{Wm}^{-2}\ \text{K}^{-4}$$

3. Hipótesis de Plank

La Física Clásica fracasó a la hora de explicar las gráficas anteriores (Catástrofe ultravioleta).

Plank formuló las siguientes hipótesis como punto de partida para explicar la radiación del cuerpo negro.

- Los átomos que emiten la radiación se comportan como osciladores armónicos
- Cada oscilador absorbe o emite energía de la radiación en una cantidad proporcional a su frecuencia de oscilación f:

$$E_0 = hf\,; \qquad \text{siendo} \qquad h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}$$

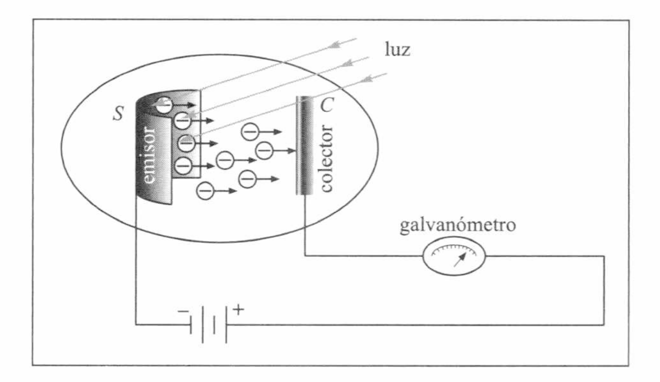
Así, la energía total emitida o absorbida por cada oscilador atómico sólo puede tener un número entero n de porciones de energía E_0

$$E = nE_0 = nhf$$

Los paquetes de energía hf se llamaron cuantos de manera que la energía de los osciladores está cuantizada y n es un número cuántico.

4. Efecto fotoeléctrico

Es la perdida de electrones que experimenta un metal al ser sometido a la acción de radiación electromagnética, ultravioleta o luz visible.



Leyes experimentales:

1ª. Para cada metal existe una frecuencia mínima llamada umbral f_0, por debajo de la cual no se produce emisión por mucho que se aumente la intensidad de la radiación.
2ª. El número de electrones emitidos es proporcional a la intensidad de la radiación luminosa recibida.
3ª. Los electrones salen todos con la misma velocidad, no influyendo para nada la intensidad de la radiación luminosa, sino únicamente su frecuencia.

Interpretación de Einstein

Einstein supone que la luz está formada por fotones, cuantos o corpúsculos luminosos con una energía igual al producto de la constante de Plank por la frecuencia de la radiación. El fotón al chocar con el electrón le transfiere su energía $E = hf$.

Esta energía se reparte de la siguiente forma:

1°. En energía o trabajo de extracción; energía necesaria para extraer el electrón del metal (constante para cada metal) a la que llamaremos W_0.
2°. En energía cinética con la que sale el electrón del metal.

Podemos escribir:

$$E = hf = hf_0 = \frac{1}{2}mv^2 + W_0$$

tanto h como W_0 y m son constantes, a medida que se reduce f se reduce la intensidad de emisión de electrones. Al llegar a la frecuencia umbral, la velocidad del electrón será nula de modo que $W = hf_0$.

Explicación de las leyes:

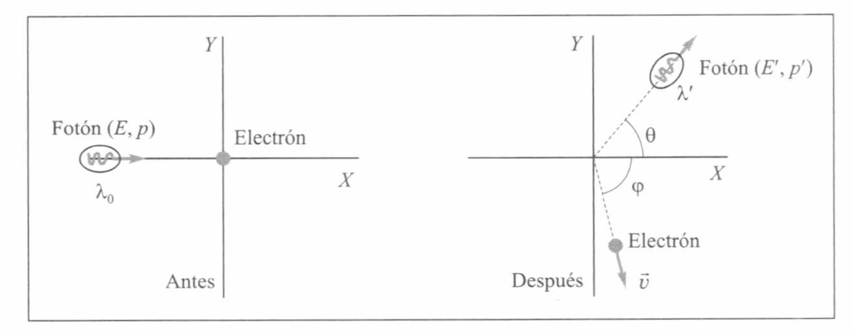
1ª. Si $f < f_0 \Rightarrow v < 0$ no salta el electrón.
2ª. A mayor intensidad de la luz mayor número de fotones y más número de choques.
3ª. A mayor intensidad de la luz mayor número de fotones, pero no mayor la frecuencia de esos fotones.

5. Efecto Compton

Compton hizo incidir un haz de rayos X de longitud de onda λ sobre una lámina de grafito y observó que la radiación dispersada presentaba una λ' mayor.

Para explicar estos hechos, Compton consideró la radiación electromagnética como fotones, cada una de ellas con masa en reposo nula y con energía:

$$E = hf = h\frac{c}{\lambda}$$



El fotón emergente tiene una longitud de onda mayor λ', lo que equivale a una energía menor:

$$E' = hf' = h\frac{c}{\lambda'}$$

pues ha entregado parte de su energía original al electrón que ahora se mueve con velocidad $\vec{v}$:

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta)\,; \qquad \text{siendo} \qquad \lambda_c = 2{,}42 \cdot 10^{-12}\ \text{m}$$

6. Dualidad onda-corpúsculo

La radiación electromagnética (la luz), tiene un comportamiento dual, eso es, unas veces se comporta como onda, pues sufre fenómenos de interferencia, difracción, polarización, etc., y otras ocasiones presenta un carácter corpuscular con fenómenos como el efecto fotoeléctrico, los rayos X, el efecto Compton, etc. En este segundo caso parece como si la luz estuviese constituida por un conjunto de partículas llamadas fotones.

7. Hipótesis de De Broglie

El aspecto corpuscular y ondulatorio de la luz están relacionados por la expresión:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

De Broglie no se detuvo aquí, sino que extendió su comportamiento dual a toda la materia. La luz y todas las partículas tienen una naturaleza dual "son ondas y partículas". Cada partícula lleva una onda asociada cuya longitud de onda es:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

8. Principio de incertidumbre de Heisenberg

Si una partícula es una onda, no podemos mantener el concepto de trayectoria. La trayectoria nos dice en cualquier instante donde se encuentra la partícula, mientras que la onda de De Broglie nos da solamente la posibilidad de que esté en un punto.

No es posible determinar simultáneamente el valor exacto de la posición x y del momento lineal p de un objeto cuántico. Los valores de las indeterminaciones correspondientes cumplen:

$$\Delta x \cdot \Delta y \geq \frac{h}{4\pi}$$

siendo: Δx indeterminación en la posición espacial
Δp indeterminación en el momento lineal

Esto significa que si conocemos con toda precisión donde está la partícula $\Delta x = 0$, desconocemos totalmente su velocidad $\Delta p > h/4\pi 0$ y viceversa.

No es posible determinar simultáneamente el valor medido de la energía E de un objeto cuántico y el intervalo de tiempo necesario para efectuar la medida. Esto exige que se cumpla:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}$$

siendo: ΔE indeterminación de la energía
Δt indeterminación en el tiempo

CUESTIONES Y EJERCICIOS DE FÍSICA CUÁNTICA

1. En el efecto fotoeléctrico. ¿Cuál es el significado físico de la función trabajo, también denominado, trabajo de extracción, del metal?

2. De las dos siguientes afirmaciones sólo una es verdadera, indica la que es y razónalo:

   a) Todos los fotones tienen la misma energía.
   b) Todos los fotones amarillos tienen la misma energía.

3. En la ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico aparece la energía cinética. ¿De quién? Explícalo un poco.

4. ¿Es cierta o falsa la siguiente afirmación? En un experimento sobre el efecto fotoeléctrico en el que se mantiene fija la longitud de onda de la luz incidente, cuanto mayor es la función de trabajo del metal menor es la energía cinética de los electrones emitidos? Razona tu respuesta.

5. Explica por qué hay una frecuencia umbral en el efecto fotoeléctrico.

6. ¿Es cierta o falsa la siguiente afirmación. Cuanto mayor es la longitud de onda de un fotón más energía tiene? Razona tu respuesta.

7. Explica la dualidad onda-corpúsculo de Luis de Broglie y determina cual es la longitud de onda asociada a un automóvil de 825 kg de peso cuando se mueve a 212 km/h. (Datos: $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J · s). (Solución: $1{,}36 \cdot 10^{-38}$ m)

8. Enuncia el principio de incertidumbre y comenta brevemente la importancia que tiene en la física actual.

9. Explica el hecho de que, cualquiera que sea la intensidad de iluminación sobre un metal, por debajo de una cierta frecuencia umbral, no se observa emisión alguna de electrones.

10. Explica brevemente el concepto de la Dualidad onda-corpúsculo y calcula la longitud de onda de un electrón que se ha puesto en movimiento mediante la aplicación de un campo eléctrico de 10 000 V. (Datos: m-electrón $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg; $h = 6,624 \cdot 10^{-34}$ J · s; carga del electrón = $-1,6 \cdot 10^{-19}$ C). (Solución: 0,123 A)

11. Escribe la ecuación que rige el efecto fotoeléctrico, indicando el significado de cada término.

12. Una emisora de radio de onda media (AM) transmite una onda electromagnética (que podemos considerar que está formada por unas partículas denominadas fotones.) con una frecuencia de $665 \cdot 10^3$ Hz, mientras que una emisora de frecuencia modulada (FM) lo hace a $99,75 \cdot 10^6$ Hz. ¿Cuántos fotones de AM necesitamos para lograr una energía igual a la de un fotón de FM? (Solución: 15 000 fotones)

13. Si queremos arrancar electrones de una determinada sustancia metálica debemos emplear por lo menos fotones que tengan una energía de 5 eV. Calcula la energía cinética máxima, expresada en eV y en Julios, de los electrones que podemos arrancar si la iluminamos con luz cuyos fotones tengan 10 eV de energía. Razona tu respuesta. (Dato: el valor absoluto de la carga del electrón es $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C). (Solución: 5 eV; $8,0 \cdot 10^{-19}$ J).

14. Elige la opción que creas correcta y razónala brevemente. La energía cinética máxima con la que podemos arrancar electrones de un metal iluminándolo con luz depende de:

a) La intensidad de luz incidente.
b) La frecuencia de la luz incidente.
c) La velocidad de la luz.
d) La polarización de la luz.

15. ¿A qué se denomina catástrofe ultravioleta? Explica algunas de las consecuencias que tuvo a principios del siglo XX.

16. Si iluminamos la superficie de un cierto metal con un haz de luz ultravioleta de frecuencia $\upsilon = 2,1 \cdot 10^{15}$ Hz, los fotoelectrones emitidos tienen una energía cinética máxima de 2,5 eV. Calcula la función trabajo de este metal (en Julios y en eV) y su frecuencia umbral. (Datos: $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C). (Solución: $9,9 \cdot 10^{-19}$ J; 6,20 eV);

17. ¿Es cierta o falsa la siguiente afirmación: Todos los electrones emitidos en el efecto fotoeléctrico tienen la misma energía cinética? Razona tu respuesta.

CUESTIONES Y EJERCICIOS RESUELTOS DE FÍSICA CUÁNTICA

1 *Junio 97 - 1,25 puntos*

En el efecto fotoeléctrico. ¿Cuál es el significado físico de la función trabajo, también denominado, trabajo de extracción, del metal?

En la ecuación Einstein del efecto fotoeléctrico:

$$h\nu = h\nu_0 + \frac{1}{2} m v^2$$

"$h\nu_0$" representa el trabajo de extracción de los electrones del metal, y es *la energía mínima necesaria para liberar un electrón del metal* (h = constante de Planck, y ν_0 = frecuencia umbral)

2 *Junio 97 - 1,25 puntos*

De las dos siguientes afirmaciones sólo una es verdadera, indica la que es y razónalo:

a) Todos los fotones tienen la misma energía.
b) Todos los fotones amarillos tienen la misma energía.

La energía de un fotón es directamente proporcional a la frecuencia de la radiación emitida:

$$E = h\nu$$

Como todos los fotones amarillos tienen la misma frecuencia, tendrán la misma energía.

Conclusión: la afirmación verdadera es la b).

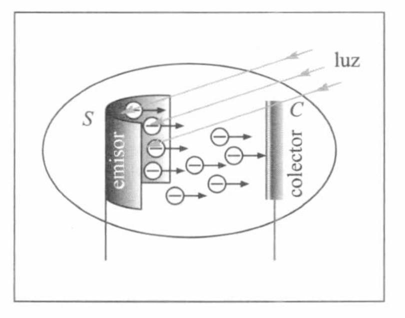
3 *Septiembre 97 - 1,25 puntos*

En la ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico aparece la energía cinética. ¿De quién? Explícalo un poco.

En la ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico

$$h\nu = W_{ext} + \frac{1}{2} m v^2$$

aparece el término $Ec = 1/2\ mv^2$ que responde a *la energía cinética del electrón arrancado del metal tras chocar con un fotón.* Si la frecuencia de la radiación del fotón υ es superior a la frecuencia umbral del metal ν_0 ($W_{ext} = h\nu_0$); se produce el efecto fotoeléctrico y el electrón salta del metal con una energía cinética Ec.



4 *Septiembre 97 - 1,25 puntos*

¿Es cierta o falsa la siguiente afirmación? En un experimento sobre el efecto fotoeléctrico en el que se mantiene fija la longitud de onda de la luz incidente, cuanto mayor es la función de trabajo del metal menor es la energía cinética de los electrones emitidos? Razona tu respuesta.

Como $Ec = h\nu - h\nu_0 = h \cdot c/\lambda - W_{ext}$, se producirá efecto fotoeléctrico, siempre que la frecuencia de la radiación incidente supere un determinado valor umbral.

$$\nu = \frac{c}{\lambda} > \nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}$$

En éste caso, *cuanto mayor sea el trabajo de extracción del metal para* $h\nu = h \cdot c/\lambda =$ *constante, menor será el valor de Ec.*

5 *Junio 98 - 1,25 puntos*

Explica por qué hay una frecuencia umbral en el efecto fotoeléctrico.

Para cada metal existe una frecuencia mínima llamada frecuencia umbral ν_0, por debajo de la cual no se produce emisión por mucho que se aumente la intensidad de la radiación.

Interpretación de Einstein:

Einstein supone que la luz está formada por fotones, cuantos o corpúsculos luminosos con una energía igual al producto de la constante de Plank por la frecuencia de la radiación. El fotón al chocar con el electrón le transfiere su energía $E = h\nu$.

Esta energía se reparte de la siguiente forma:

1°. En energía o trabajo de extracción; energía necesaria para extraer el electrón del metal (constante para cada metal) a la que llamaremos W_0.
2°. En energía cinética con la que sale el electrón del metal.

Podemos escribir:

$$\boldsymbol{E} = h\nu = W_0 + \frac{1}{2}mv^2 = h\nu_0 + \frac{1}{2}mv^2$$

tanto h como W_0 y m son constantes, *a medida que se reduce* ν *se reduce la intensidad de emisión de electrones. Al llegar a la frecuencia umbral, la velocidad del electrón será nula de modo que* $W_0 = h\nu_0$.

6 *Junio 98 - 1,25 puntos*

¿Es cierta o falsa la siguiente afirmación. Cuanto mayor es la longitud de onda de un fotón más energía tiene? Razona tu respuesta.

La energía de un fotón viene dada por la expresión cuántica $E = h\nu$, donde h es la constante de Planck y ν la frecuencia de la radiación monocromática a la que pertenece. Si el fotón viaja en el vacío:

$$\nu = \frac{c}{\lambda}$$

siendo: c = velocidad de la luz en el vacío y
λ = longitud de onda de la radiación correspondiente.

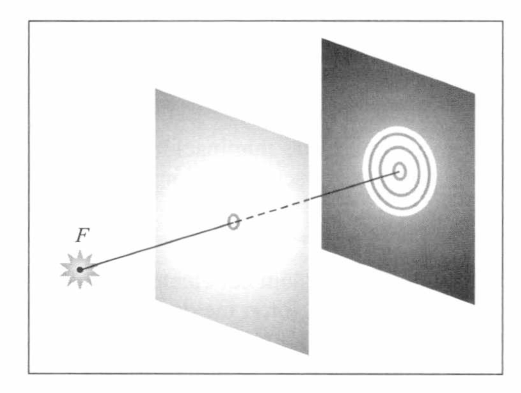
Sustituyendo esta última expresión en la primera queda:

$$E = h\frac{c}{\lambda}$$

donde se aprecia que E y λ son magnitudes inversamente proporcionales y por tanto *es falso que a mayor λ mayor E*, y cierta la afirmación contraria.

7 *Septiembre 98 - 1,25 puntos*

Explica la dualidad onda-corpúsculo de Luis de Broglie y determina cual es la longitud de onda asociada a un automóvil de 825 kg de peso cuando se mueve a 212 km/h. (Datos: $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J · s).



De Broglie en 1923, enuncia su hipótesis que viene a decir que cualquier partícula en movimiento lleva asociada una onda que se puede poner de manifiesto en determinadas condiciones. (Ejemplo: difracción de electrones), y cuya relación entre la longitud de onda y la masa de la partícula viene dada por:

$$\lambda = \frac{h}{m\text{v}}$$

Pasamos la velocidad a m/s:

$$v = 212\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 58{,}9\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La longitud de onda asociada al automóvil será:

$$\boxed{\lambda = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{825 \cdot 58{,}9} = 1{,}36 \cdot 10^{-38}\ \text{m}}$$

8 *Septiembre 98 - 1,25 puntos*

Enuncia el principio de incertidumbre y comenta brevemente la importancia que tiene en la física actual.

Si una partícula es una onda, no podemos mantener el concepto de trayectoria. La trayectoria nos dice en cualquier instante donde se encuentra la partícula, mientras que la onda de De Broglie nos da solamente la posibilidad de que esté en un punto.

No es posible determinar simultáneamente el valor exacto de la posición x y del momento lineal p de un objeto cuántico. Los valores de las indeterminaciones correspondientes cumplen:

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}}$$

siendo: Δx indeterminación en la posición espacial
Δp indeterminación en el momento lineal

Esto significa que si conocemos con toda precisión donde está la partícula $\Delta x = 0$ desconocemos totalmente su velocidad $\Delta p \geq h/4\pi$ y viceversa.

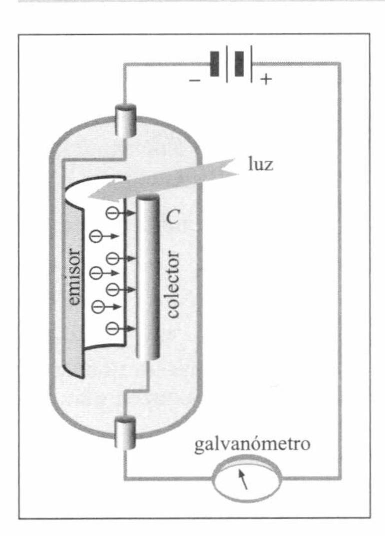
No es posible determinar simultáneamente el valor medido de la energía E de un objeto cuántico y el intervalo de tiempo necesario para efectuar la medida. Esto exige que se cumpla:

$$\boxed{\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}}$$

siendo: ΔE indeterminación de la energía
Δt indeterminación en l tiempo

9 *Junio 99 - 1,25 puntos*

Explica el hecho de que, cualquiera que sea la intensidad de iluminación sobre un metal, por debajo de una cierta frecuencia umbral, no se observa emisión alguna de electrones.



Según la ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico parte de la energía del fotón incidente se emplea en realizar un trabajo de extracción del electrón de la superficie del metal. Esta energía es propia y específica de cada metal y su valor se puede relacionar con la energía de una radiación, cuya frecuencia (llamada frecuencia umbral ν_0) cumpliera que:

$$W_{ext} = h\nu_0$$

De la ecuación de Einstein podemos deducir:

$$Ec = h\,(\nu - \nu_0)$$

Los electrones sobre los que han incidido los fotones, únicamente escaparán a la atracción del núcleo cuando tengan energía cinética para ello una vez superado el trabajo de extracción, es decir, cuando $\nu > \nu_0$.

10 *Septiembre 99 - 1,25 puntos*

Explica brevemente el concepto de la Dualidad onda-corpúsculo y calcula la longitud de onda de un electrón que se ha puesto en movimiento mediante la aplicación de un campo eléctrico de 10 000 V. (Datos: m-electrón $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg; $h = 6{,}624 \cdot 10^{-34}$ J · s; carga del electrón $= -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C).

La radiación electromagnética (la luz), tiene un comportamiento dual, eso es, unas veces se comporta como onda, pues sufre fenómenos de interferencia, difracción, polarización, etc., y otras ocasiones presenta un carácter corpuscular con fenómenos como el

efecto fotoeléctrico, los rayos X, el efecto Compton, etc. En este segundo caso parece como si la luz estuviese constituida por un conjunto de partículas llamadas fotones.

De Broglie no se detuvo aquí, sino que extendió su comportamiento dual a toda la materia. La luz y todas las partículas tienen una naturaleza dual "son ondas y partículas". Cada partícula lleva una onda asociada cuya longitud de onda es:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

La energía que adquiere el electrón al moverse bajo la influencia de una diferencia de potencial se emplea exclusivamente en energía cinética.

$$q\,(V_B - V_A) = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^4 = 1{,}6 \cdot 10^{-15}\ \text{J} = \frac{1}{2} mv^2$$

De donde:

$$v = \sqrt{\frac{1{,}6 \cdot 10^{-15}}{9{,}11 \cdot 10^{-31}}} = 5{,}9 \cdot 10^7\ \text{m/s}$$

La longitud de onda que lleva asociada dicho electrón por encontrarse en movimiento, vale según la hipótesis de De Broglie:

$$\lambda = \frac{6{,}624 \cdot 10^{-34}}{9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 5{,}9 \cdot 10^7} = 1{,}23 \cdot 10^{-11}\ \text{m} = \boxed{0{,}123\ \text{Å}}$$

11

Junio 2000 - 1,25 puntos

Escribe la ecuación que rige el efecto fotoeléctrico, indicando el significado de cada término.

La ecuación de Einstein para el efecto fotoeléctrico, basada en el principio de conservación de la energía, dice que:

La energía de un fotón incidente sobre un electrón de un metal ($h\nu$), se emplea parte en realizar el trabajo de extracción de dicho metal ($W_{ext} = h\nu_0$) y el resto en comunicarle a dicho electrón una energía cinética:

$$\boxed{h\nu = h\nu_0 + \frac{1}{2} mv_0}$$

En donde h es la constante de Plank, ν y ν_0 las frecuencias de la radiación incidente y umbral respectivamente; y "m" y "v", la masa y velocidad del electrón.

12

Junio 97 - 1 punto

Una emisora de radio de onda media (AM) transmite una onda electromagnética (que podemos considerar que está formada por unas partículas denominadas fotones.) con una frecuencia de $665 \cdot 10^3$ Hz, mientras que una emisora de frecuencia modulada (FM) lo hace a $99{,}75 \cdot 10^6$ Hz. ¿Cuántos fotones de AM necesitamos para lograr una energía igual a la de un fotón de FM?

Vamos a calcular la energía de un fotón de onda media y la de un fotón de frecuencia modulada mediante la expresión:

$$E = h\nu$$

siendo: h la constante de Plank y
ν la frecuencia de la onda electromagnética

$$E_{AM} = h \cdot 665 \cdot 10^3 \text{ J} ; \qquad E_{FM} = h \cdot 99{,}75 \cdot 10^6 \text{ J}$$

El número de fotones de AM que necesitamos para lograr una energía igual a la de un fotón de FM será:

$$\boxed{n = \frac{E_{FM}}{E_{AM}} = 15\,000 \text{ fotones}}$$

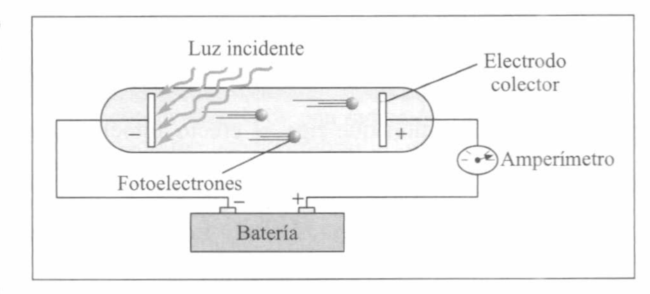
13

Septiembre 97 - 1 punto

Si queremos arrancar electrones de una determinada sustancia metálica debemos emplear por lo menos fotones que tengan una energía de 5 eV. Calcula la energía cinética máxima, expresada en eV y en Julios, de los electrones que podemos arrancar si la iluminamos con luz cuyos fotones tengan 10 eV de energía. Razona tu respuesta. (Dato: el valor absoluto de la carga del electrón es $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C).

Según la ecuación del efecto fotoeléctrico de Einstein:

$$Ec_{máx} = h\nu - h\nu_0$$



Sabemos que:

$$h\nu = 10 \text{ eV} ;$$

$$W_{ext} = h\nu_0 = 5 \text{ eV}$$

Sustituyendo en la ecuación inicial:

$$Ec_{máx} = 10 - 5 = \boxed{5 \text{ eV}} \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} = \boxed{8{,}0 \cdot 10^{-19} \text{ J}}$$

14

Junio 98 - 1 punto

Elige la opción que creas correcta y razónala brevemente. La energía cinética máxima con la que podemos arrancar electrones de un metal iluminándolo con luz depende de:

a) La intensidad de luz incidente.
b) La frecuencia de la luz incidente.
c) La velocidad de la luz.
d) La polarización de la luz.

Interpretación de Einstein:

Einstein supone que la luz está formada por fotones, cuantos o corpúsculos luminosos con una energía igual al producto de la constante de Plank por la frecuencia de la radiación. El fotón al chocar con el electrón le transfiere su energía $E = h\nu$.

Esta energía se reparte de la siguiente forma:

1°. En energía o trabajo de extracción; energía necesaria para extraer el electrón del metal (constante para cada metal) a la que llamaremos $W_0 = h\nu_0$.
2°. En energía cinética con la que sale el electrón del metal.

Podemos escribir:

$$E = h\nu = h\nu + Ec \Rightarrow Ec = h(\nu - \nu_0)$$

Al ser ν_0 = cte. para cada metal, se desprende de la ecuación anterior que la respuesta correcta es la b).

15 *Septiembre 98 - 1 punto*

¿A qué se denomina catástrofe ultravioleta? Explica algunas de las consecuencias que tuvo a principios del siglo XX.

La Física clásica sólo puede dar una correcta explicación de la radiación del cuerpo negro o longitudes de onda grandes (infrarrojo), pero fracasa rotundamente a longitudes de onda pequeñas (ultravioleta).

Todas las tentativas de armonizar los resultados experimentales con la teoría clásica, habían fracasado. Era pues necesario buscar una nueva interpretación teórica de dichos resultados. Fue Max Plank en 1900 quien sentó las bases de una nueva teoría, la teoría cuántica.

Hipótesis de Plank:

Plank formuló las siguientes hipótesis como punto de partida para explicar la radiación del cuerpo negro.

- Los átomos que emiten la radiación se comportan como osciladores armónicos
- Cada oscilador absorbe o emite energía de la radiación en una cantidad proporcional a su frecuencia de oscilación f:

$$E_0 = hf; \qquad \text{siendo} \quad h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}$$

Así, la energía total emitida o absorbida por cada oscilador atómico sólo puede tener un número entero n de porciones de energía E_0

$$E = nE_0 = nhf$$

Los paquetes de energía hf se llamaron cuantos de manera que la energía de los osciladores está cuantizada y n es un número cuántico.

16 *Junio 99 - 1 punto*

Si iluminamos la superficie de un cierto metal con un haz de luz ultravioleta de frecuencia $\upsilon = 2{,}1 \cdot 10^{15}$ Hz, los fotoelectrones emitidos tienen una energía cinética máxima de 2,5 eV. Calcula la función trabajo de este metal (en Julios y en eV) y su frecuencia umbral. (Datos: $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C).

Si aplicamos la ecuación de Einstein para el efecto fotoeléctrico:

$$W_{ext} = h\nu - Ec$$

Pasamos la energía cinética a Julios:

$$Ec = 2{,}5 \text{ eV} \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} = 4 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Sustituyendo en la ecuación inicial:

$$W_{ext} = 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 2{,}1 \cdot 10^{15} - 4 \cdot 10^{-19} = \boxed{9{,}9 \cdot 10^{-19} \text{ J}}$$

La función trabajo expresado en eV será:

$$W_{ext} = 9{,}9 \cdot 10^{-19} \text{ J} \frac{1 \text{ eV}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = \boxed{6{,}20 \text{ eV}}$$

El trabajo de extracción y la frecuencia umbral vienen relacionadas por la ecuación:

$$\nu_0 = \frac{W_{ext}}{h} = \frac{9{,}9 \cdot 10^{-19}}{6{,}63 \cdot 10^{-34}} = \boxed{1{,}5 \cdot 10^{15} \text{ Hz}}$$

17

Septiembre 99 - 1 punto

¿Es cierta o falsa la siguiente afirmación: Todos los electrones emitidos en el efecto fotoeléctrico tienen la misma energía cinética? Razona tu respuesta.

De la ecuación de Einstein aplicada al efecto fotoeléctrico:

$$Ec = h\nu - W_{ext}$$

Se deduce que la energía cinética es función de la frecuencia de la radiación, y del trabajo de extracción. Por tanto, *no es cierto* que todos los electrones emitidos en el efecto fotoeléctrico tengan la misma energía cinética.

Para que la afirmación fuese cierta sería preciso considerar un determinado metal (W_{ext} = cte.) y que se irradiara con luz monocromática (ν = cte.).

TEMA 7

FÍSICA NUCLEAR

RESUMEN TEÓRICO DEL TEMA

1. Estructura de la materia

En el átomo neutro, el número de protones existentes en su núcleo es igual al de electrones que giran a su alrededor. Al número de protones que contiene el núcleo se le denomina **número atómico** y se designa por la letra Z.

Número másico es el número total de protones y neutrones (nucleones), y se designa por A.

El número de neutrones N, se podrá calcular, por tanto, mediante $N = A - Z$.

Se llama **nucleido** a los distintos núcleos atómicos que existen en la naturaleza o pueden producirse artificialmente. Los nucleidos se suelen representar de la siguiente forma ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$.

Análogamente las partículas fundamentales del núcleo se notarán así: Protón ${}^{1}_{1}p$; Neutrón ${}^{1}_{0}n$.

En Física atómica para expresar las masas de los átomos y de las partículas que los constituyen se adopta la llamada **unidad de masa atómica** (uma), que equivale a la fracción 1/12 de la masa del átomo de carbono ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$. El valor de esta pequeñísima unidad de masa, expresado en kilogramos es:

$$1 \text{ uma} = 1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Las masas del protón y del neutrón, en unidades de masa atómica son muy próximas a la unidad:

$$m\,(p) = 1{,}0073 \text{ uma} \; ; \qquad m\,(n) = 1{,}0086 \text{ uma}$$

Y la masa del electrón: $m\,(e) = 5{,}49 \cdot 10^{-4}$ uma.

Para medir energías, se emplea en Física atómica una unidad especial **el electronvoltio** (eV) y sus múltiplos el Kiloelectronvoltio (1 KeV = 10^3 eV) y el Megaelectronvoltio (1 MeV = 10^6 eV).

Se define el **electronvoltio** como la energía cinética que posee un electrón inicialmente en reposo, después de ser acelerado al someterlo a la diferencia de potencial de un voltio.

$$1 \text{ eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

2. Núcleo atómico

Por ser los nucleones (protones y neutrones) muchos más pesados que los electrones, se puede considerar que toda la masa del átomo está concentrada en el núcleo. **La forma de los núcleos** puede ser considerada como una esfera, aunque puede tomar la forma de un elipsoide cuyo eje mayor es un 30% superior al menor. En la mayor parte de los experimentos la aproximación esférica suele ser satisfactoria; en estos casos, el **radio del núcleo** puede calcularse muy aproximadamente por la fórmula $R = 1{,}5 \cdot 10^{-15} \cdot A^{1/3}$ m, donde A es el número másico. Se suele utilizar para medirlos **el femto** (f).

$$1 \text{ f} = 10^{-15} \text{ m}$$

Al ser este radio proporcional a la raíz cúbica del número másico, resulta que el volumen de los núcleos es directamente proporcional a su masa, lo que significa que prácticamente todos los núcleos atómicos **tienen la misma densidad**. Debido al tamaño del núcleo esta densidad es enormemente elevada.

Si tenemos en cuenta que las **dimensiones de los átomos son** por término medio, de unos 10^{-8} cm, resulta que el núcleo es unas *diez mil veces más pequeño* que el átomo a que pertenece, Para medir los átomos se suele utilizar el *Angstrom*.

$$1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}$$

3. Energía de enlance de un núcleo

Einstein publicó su primer resultado sobre la teoría de la relatividad y en él aparecía **el principio de convertibilidad de la masa en energía** y viceversa de acuerdo con la ecuación $E = m \cdot c^2$ donde m es la masa que puede convertirse en energía E y c es la velocidad de la luz en el vacío ($3 \cdot 10^8$ m/s).

La energía equivalente a la unidad de masa atómica se calcula así:

$$1 \text{ uma} = mc^2 = 1{,}66 \cdot 10^{-27} (3 \cdot 10^8)^2 = 1{,}49 \cdot 10^{-10} \text{ J} = 931 \text{ MeV}$$

Esta equivalencia es la que se utiliza en el cálculo de la energía absorbida o desprendida en transmutaciones nucleares.

La masa de los núcleos atómicos medida cuidadosamente mediante un aparato de gran precisión denominado espectrógrafo de masas, resulta ser ligeramente inferior a la suma de las masas de los nucleones que lo constituyen.

La diferencia denominada **defecto de masa**, puede calcularse a partir de la expresión:

$$\Delta m = Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_N - Mnúcleo$$

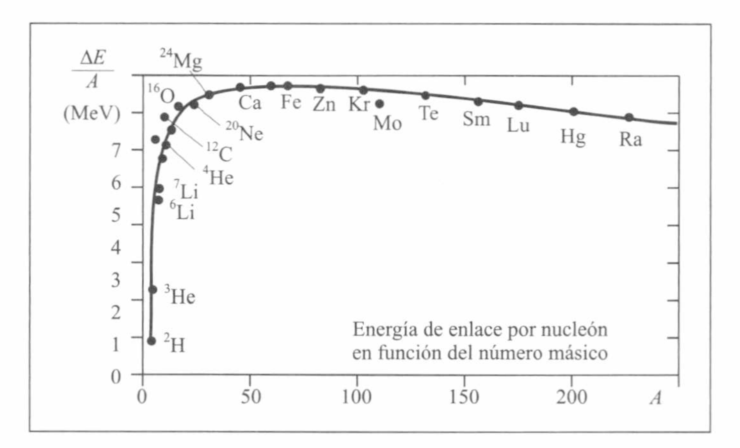
Y a la energía equivalente **energía de enlace** se calcula mediante la ecuación $E = \Delta m \cdot c^2$, o bien, mediante la correspondencia 1 uma = 931 MeV.

4. Energía de enlace por nucleón

El cociente entre la energía de enlace y el número de nucleones de un núcleo es la energía media de enlace por nucleón. Representa la energía media necesaria para extraer un nucleón de su núcleo.

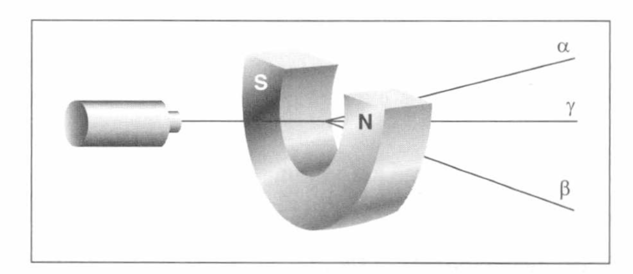
$$E_{\text{nucleón}} = \frac{E_{\text{enlace}}}{A}$$

La energía de enlace por nucleón varía en función del número de nucleones, como se puede ver en la figura.



De la gráfica se deduce que los núcleos más estables, aquellos a los que corresponde mayor energía de enlace por nucleón, son los que tienen un número másico alrededor de 60.

5. Radiactividad natural



La radiactividad natural es la transmutación espontánea de unos núcleos en otros acompañada de la emisión de partículas elementales. Este fenómeno sólo ocurre en los núcleos inestables

Los **fenómenos radiactivos** son: **desintegración** α, **desintegración** β y **emisión de radiación** γ.

a) **Emisión de partículas** α:

Cuando un núcleo emite una partícula α, que consiste en un núcleo de ${}^{4}_{2}He$, el número atómico del núcleo resultante disminuye en dos unidades, mientras que el número másico disminuye en cuatro, dando lugar a la aparición de un núcleo de otro elemento diferente.

$$ {}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He $$

b) **Emisión de una partícula** β:

Consiste en un electrón producido por la desintegración de un neutrón del núcleo. El neutrón al desintegrarse da lugar a tres partículas: un protón, un electrón y un neutrino (partícula que prácticamente no tiene masa y su carga eléctrica es nula).

$$n \rightarrow p^+ + e^- + \nu$$

Este electrón creado en la desintegración del neutrón es el que emite en forma de radiación β, quedando el núcleo primitivo con un neutrón menos, pero con un protón más. Es decir, después de una radiación β el núcleo resultante tiene igual número másico que el primitivo, pero su número atómico es superior en una unidad.

$$^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A}_{Z+1}\mathrm{Y} + \beta$$

c) **Emisión de radiación** γ:

La emisión γ es una radiación de fotones. Cuando un núcleo radiactivo emite una radiación γ no se modifica ni su número atómico ni su número másico; simplemente realiza un proceso de reajuste energético. Los fotones emitidos pueden tener una energía de varios MeV.

La emisión puede acompañar a las emisiones α o β. Cuando un núcleo emite una partícula α o β generalmente queda en un estado excitado, para volver a su situación de mínima energía emite radiaciones γ.

6. Constantes radiactivas

En un tiempo dt se desintegran dN partículas. El número de partículas desintegradas dN debe ser proporcional al número de partículas N y al tiempo considerado dt. Matemáticamente se puede expresar:

$$dN = -\lambda \cdot N \cdot dt \qquad (1)$$

donde λ es la **constante de desintegración** (cantidad de átomos que se desintegran por unidad de tiempo). El signo menos expresa que la cantidad de átomos N, es cada vez menor.

La magnitud $-dN/dt = \lambda \cdot N$ se llama **actividad**.

La **actividad** es:

a) Velocidad de desintegración: $A = -\mathbf{dN}/dt$.
b) El producto de la constante de desintegración por el número de núcleos no desintegrados: $A = \lambda \cdot N$.

La unidad de actividad en el S.I. es el Becquerel (Bq). Un Bq es la actividad de una sustancia que desintegra un núcleo por segundo.

Integrando la ecuación (1) obtenemos:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \qquad (2)$$

donde N son los núcleos no desintegrados en el tiempo t y N_0 son los núcleos no desintegrados en el instante inicial.

El tiempo que tarda una sustancia radiactiva en reducir el número de núcleos a la mitad de los iniciales se llama **período de semidesintegración** T.

Sustituyendo en la ecuación (2) $N = N_0/2$ obtendremos una relación entre el período de semidesintegración T y la constante de semidesintegración.

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\lambda T} \Rightarrow \mathrm{Ln}\,\frac{1}{2} = -\lambda \cdot T; \qquad T = \frac{\mathrm{Ln}\,2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda} \qquad (3)$$

Se llama **vida media** al tiempo promedio de los átomos de una sustancia radiactiva. La desintegración de un átomo es un fenómeno aleatorio que se produce al azar, por tanto, admitiremos que la vida de un átomo puede estar comprendida entre $t = 0$ y $t = \infty$.

La expresión que sirve para calcular la vida media es $\tau = 1/\lambda$, es decir, la vida media es la inversa de la constante de desintegración. Sustituyendo en (3).

$$T = 0{,}693\ \tau$$

7. Radiactividad artificial

Una reacción nuclear es el proceso a través del cual un núcleo se bombardea con partículas y se transforma en otro distinto. Se expresa por la ecuación $X + a \rightarrow Y + b$ o bien en notación simplificada $X\,(a,\, b)\, Y$, siendo X = núcleo inicial, Y = núcleo final, a = partícula incidente y b = partícula emitida.

En una ecuación ajustada, la suma de los subíndices (números atómicos) y la suma de los superíndices (números másicos) debe ser la misma en los dos lados de la ecuación.

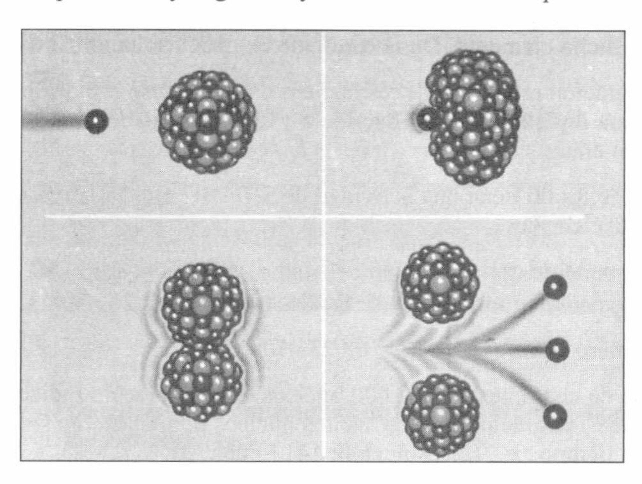
Las reacciones de fisión ocurren cuando algunos átomos pesados como el uranio-235 o el plutonio-239 son bombardeados por neutrones. Entonces tiene lugar la fisión o partición del núcleo de uranio o de plutonio en dos fragmentos que vienen a ser núcleos de masa intermedia.

Dos ejemplos de tales reacciones son los siguientes:

$$^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{144}_{56}\mathrm{Ba} + {}^{89}_{36}\mathrm{Kr} + 3\,{}^{1}_{0}n$$

$$^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{137}_{52}\mathrm{Te} + {}^{97}_{40}\mathrm{Zr} + 2\,{}^{1}_{0}n$$

Por la fisión del uranio-235 se pueden generar hasta un centenar de núcleos atómicos distintos, todos ellos radiactivos, que se llaman **productos de fisión**. Además de una gran energía se desprenden rayos gamma y dos o tres neutrones por cada fisión



Los neutrones liberados pueden a su vez chocar con otros átomos de uranio-235 y producir nuevas fisiones con su correspondiente desprendimiento de energía y liberación de nuevos neutrones, tiene así lugar una **reacción en cadena**. Si esta reacción se controla debidamente tenemos el fundamento de los **reactores nucleares**. Si, por el contrario, se

deja que la energía se libere de una vez, en poco tiempo, se trata del fundamento de la bomba atómica.

Las reacciones de fusión también ocasionan un gran desprendimiento de energía. En ellas, contrariamente a las de fisión tiene lugar la fusión o unión de dos núcleos ligeros para formar un núcleo más pesado. Así, por ejemplo ocurre en la reacción:

$$^{2}_{1}H + ^{3}_{2}He \rightarrow ^{4}_{2}He + ^{1}_{1}H$$

La energía que se genera en este caso por gramo de materia fusionada es unas cuatro veces superior a la generada en la fisión de un gramo de uranio-235.

Para que tenga lugar la fusión nuclear, los núcleos deben chocar entre sí a gran velocidad, lo que se consigue cuando la temperatura del gas que los contiene es superior a cien millones de grados centígrados

CUESTIONES EJERCICIOS DE FÍSICA NUCLEAR

1. ¿Cuántos períodos de semidesintegración son necesarios para que una sustancia radiactiva disminuya hasta quedar tan sólo una milésima del número de núcleos iniciales que tenía? (Solución: 9,97)

2. El período de semidesintegración de una sustancia radiactiva es 500 s. Si inicialmente teníamos 10^{12} núcleos y ahora nos quedan 10^{8}; calcula la antigüedad de la muestra, es decir, el tiempo que ha transcurrido. (Solución: 6 664 s)

3. Inicialmente teníamos $6 \cdot 10^{23}$ núcleos de ^{226}Ra que tiene un período de desintegración de 1600 años. ¿Cuántos se habrán desintegrado al cabo de 2 000 años? (Solución: $3,5 \cdot 10^{23}$ núcleos)

4. La actividad de un elemento pasa a valer 1/1024 de su valor inicial al cabo de 280 s. Calcula el período de semidesintegración de este elemento. (Solución: 28 s)

5. Al empezar un experimento de desintegración radiactiva, tenemos $4,6 \cdot 10^{15}$ núcleos. Veinte días después nos quedan $8,14 \cdot 10^{14}$. Calcula el período de semidesintegración de dicho elemento. Da el resultado en días. (Solución: 8 días)

6. La desintegración radiactiva de los núcleos es un proceso estadístico que viene descrito por una ley exponencial. Escríbela y comenta las diferentes magnitudes que aparecen en ella.

7. Un gramo de Radio tiene una actividad de $3,7 \cdot 10^{10}$ Bq. Si la masa atómica del Ra es de 226 u. Calcular:

a) La constante de desintegración del Radio. (Solución: $1,38 \cdot 10^{-11}\ s^{-1}$)
b) La vida media de los átomos de Radio. (Solución: $7,25 \cdot 10^{10}$ s)

(Dato: Número de Avogadro $N_A = 6,023 \cdot 10^{23}$).

8. Se dispone de una muestra de 2 000 núcleos de un elemento radiactivo cuyo período de semidesintegración es T. ¿Cuántos núcleos permanecerán sin desintegrarse al cabo de un tiempo $t = T/2$? (Solución: 1414 núcleos)

9. Calcula la energía de enlace del núcleo del nitrógeno ($A = 14$, $Z = 7$) y su energía de enlace por nucleón. (Datos: $m_{(neutrón)} = 1,008665$ u; $m_{(protón)} = 1,007277$ u; $m_{(N\text{-}14)} = 13,99922$; 1 u $= 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg; $c = 300\ 000$ km/s. (Solución: $1,68 \cdot 10^{-11}$ J; $1,2 \cdot 10^{-12}$ J)

10. Determina el número atómico y el número másico del isótopo que resultará de $^{238}_{92}U$ después de emitir dos partículas alfa y tres beta. (Solución: 91; 230)

11. El tritio un isótopo radiactivo del hidrógeno, emite radiación beta con una vida media de 12,5 años. ¿Qué porcentaje de la muestra original quedará al cabo de 17,32 años? (Solución: 25%)

12. De un cierto elemento radiactivo sabemos que inicialmente había 106 núcleos y que actualmente nos quedan 10^3 núcleos sin desintegrar. Si dicho elemento tiene un período de semidesintegración de 6 años. Calcula el tiempo que ha transcurrido. (Solución: 59,8 años)

13. De una cierta sustancia radiactiva sabemos dos datos 10 s y 6,8 s. Son la vida media y el período de semidesintegración; pero no sabemos cual es cada uno. ¿Puedes tu identificarlos? Razona tu respuesta.

14. Se denominan núcleos doblemente mágicos a aquellos que tienen las capas de protones y neutrones totalmente llenas, debido a lo cual dichos núcleos son esféricos. Sabiendo que el oxígeno ($A = 16$) y el calcio ($A = 40$) son doblemente mágico, calcula el cociente entre el volumen del núcleo de Calcio y el de Oxígeno. (Solución: 5/2)

15. La vida media de un isótopo radiactivo es de 44 días. Calcula su período de semidesintegración y la constante de desintegración radiactiva. (Solución: $2,6 \cdot 10^{-7}$ s^{-1}; $2,7 \cdot 10^6$ s)

16. Un modelo nuclear supone que los núcleos son esféricos y su radio viene dado por la expresión $R = R_0 \cdot A^{1/3}$, siendo $R_0 = 1,2$ fm (1 fm = 10^{-15} m) una constante. Calcula la densidad, en el S.I. de un núcleo esférico que tenga N nucleones y luego exprésala en toneladas/cm^3 para que te hagas una idea aproximada de lo enorme que es. (Dato: Supóngase que el protón y el neutrón tienen los dos la misma masa, siendo su valor $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg). (Solución: $2,3 \cdot 10^8$ toneladas/cm^3)

17. ¿A qué se denomina Período de semidesintegración de una sustancia? La constante de desintegración de una muestra radiactiva es $\lambda = 0,02$ s^{-1}. ¿Cuál es su período de semidesintegración? (Solución: 34,66 s)

CUESTIONES Y EJERCICIOS RESUELTOS DE FÍSICA NUCLEAR

1 *Junio 97 - 1,25 puntos*

¿Cuántos períodos de semidesintegración son necesarios para que una sustancia radiactiva disminuya hasta quedar tan sólo una milésima del número de núcleos iniciales que tenía?

A partir de la ley de desintegración radiactiva y de la relación entre el período y la constante de desintegración λ obtenemos:

$$N = N_0\, e^{-\lambda t} = N_0\, e^{-\frac{\text{Ln}\,2}{T}\cdot t}$$

Al quedar una milésima del número de núcleos iniciales:

$$N = \frac{N_0}{1\,000}$$

Sustituyendo N en la ecuación de desintegración:

$$\frac{N_0}{1\,000} = N_0\, e^{-\frac{\text{Ln}\,2}{T}\cdot t} \;\Rightarrow\; \text{Ln}\,0{,}001 = -\frac{\text{Ln}\,2}{T}\cdot t$$

Despejando el tiempo queda:

$$t = -\frac{\text{Ln}\,0{,}001}{\text{Ln}\,2}\,T = \boxed{9{,}97\ \text{T}}$$

2 *Junio 97 - 1,25 puntos*

El período de semidesintegración de una sustancia radiactiva es 500 s. Si inicialmente teníamos 10^{12} núcleos y ahora nos quedan 10^8; calcula la antigüedad de la muestra, es decir, el tiempo que ha transcurrido.

La relación entre la constante de desintegración λ y el período de semidesintegración T viene dada por:

$$\lambda = \frac{\text{Ln}\,2}{T} = \frac{\text{L}n\,2}{500}\ \text{s}^{-1}$$

Sustituyendo en la ecuación de la ley de desintegración radiactiva:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \;\Rightarrow\; 10^8 = 10^{12}\cdot e^{-\frac{\text{Ln}\,2}{500}t}$$

Resulta un valor para t de:

$$\text{Ln}\,10^{-4} = -\frac{\text{L}n\,2}{500}t \;\Rightarrow\; t = -\frac{500\ \text{Ln}\,10^{-4}}{\text{Ln}\,2} = \boxed{6\,664\ \text{s}}$$

3 *Septiembre - 1,25 puntos*

Inicialmente teníamos $6 \cdot 10^{23}$ núcleos de ^{226}Ra que tiene un período de desintegración de 1 600 años. ¿Cuántos se habrán desintegrado al cabo de 2 000 años?

La desintegración radiactiva de los núcleos es un proceso estadístico que viene descrito por la ley exponencial:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t} = N_0 \cdot e^{-\frac{\text{Ln}\,2}{T}t}$$

Sustituyendo los datos:

$$N = 6\cdot 10^{23}\cdot e^{-\frac{\text{Ln}\,2}{1\,600}2\,000} = 2{,}5\cdot 10^{23}\ \text{núcleos}$$

Los núcleos que se habrán desintegrado serán:

$$N_0 - N = \boxed{3{,}5 \cdot 10^{23} \text{ núcleos}}$$

4 *Septiembre - 1,25 puntos*

La actividad de un elemento pasa a valer 1/1024 de su valor inicial al cabo de 280 s. Calcula el período de semidesintegración de este elemento.

El producto de la constante de desintegración por el número de núcleos no desintegrados recibe el nombre de actividad.

$$A = \lambda\, N = \lambda\, N_0 \cdot e^{-\frac{\text{Ln}\,2}{T}t} \quad \Rightarrow \quad A = A_0 \cdot e^{-\frac{\text{Ln}\,2}{T}t}$$

Sustituyendo los datos y tomando logaritmos neperianos a ambos lados de la igualdad:

$$\frac{1}{1\,024} A_0 = A_0 \cdot e^{-\frac{\text{Ln}\,2}{T}280} \quad \Rightarrow \quad \text{Ln}\,\frac{1}{1\,024} = -\frac{\text{Ln}\,2}{T}\,280$$

Despejando el período obtenemos:

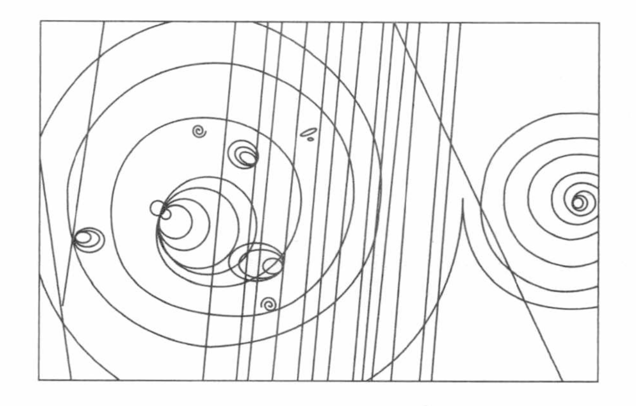
$$T = \frac{-280\;\text{Ln}\,2}{\text{Ln}\,\dfrac{1}{1\,0{,}24}} = \boxed{28 \text{ s}}$$

5 *Junio 98 - 1,25 puntos*

Al empezar un experimento de desintegración radiactiva, tenemos $4{,}6 \cdot 10^{15}$ núcleos. Veinte días después nos quedan $8{,}14 \cdot 10^{14}$. Calcula el período de semidesintegración de dicho elemento. Da el resultado en días.

El número de núcleos no desintegrados en el instante t viene dado por la ecuación exponencial:

$$N = N_0 \cdot e^{-\frac{\text{Ln}\,2}{T}t} \quad \Rightarrow \quad \text{Ln}\,\frac{N}{N_0} = -\frac{\text{Ln}\,2}{T}\,t$$



El período de semidesintegración de dicho elemento será:

$$T = -\frac{t \cdot \text{Ln}\,2}{\text{Ln}\,\frac{N}{N_0}} = -\frac{20\,\text{Ln}\,2}{\text{Ln}\,\frac{8{,}14 \cdot 10^{14}}{4{,}6 \cdot 10^{15}}} = \boxed{8 \text{ días}}$$

6 *Junio 98 - 1,25 puntos*

La desintegración radiactiva de los núcleos es un proceso estadístico que viene descrito por una ley exponencial. Escríbela y comenta las diferentes magnitudes que aparecen en ella.

La ley exponencial de desintegración radiactiva es:

$$[N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}]$$

donde: N = número de núcleos sin desintegrar tras un tiempo "t" transcurrido.
N_0 = número de núcleos iniciales
λ = constante de desintegración o constante radiactiva (indica la probabilidad por unidad de tiempo de que un núcleo se desintegre).
t = tiempo transcurrido desde que los núcleos N_0 empiezan a desintegrarse.

7 *Junio 99 - 1,25 puntos*

Un gramo de Radio tiene una actividad de $3{,}7 \cdot 10^{10}$ Bq. Si la masa atómica del Ra es de 226 u. Calcular:

a) La constante de desintegración del Radio.
b) La vida media de los átomos de Radio.

(Dato: Número de Avogadro $N_A = 6{,}023 \cdot 10^{23}$).

a) Calculamos primero el número de átomos que tiene un gramo de Radio:

$$N = 1\,\text{g}\,\frac{1\,\text{mol}}{226\,\text{g}} \cdot \frac{6{,}023 \cdot 10^{23}\ \text{átomos}}{1\,\text{mol}} = 2{,}67 \cdot 10^{21}\ \text{átomos}$$

La actividad es el producto de la constante de desintegración por el número de núcleos no desintegrados:

$$A = \lambda \cdot N \ \Rightarrow\ \lambda = \frac{A}{N} = \frac{3{,}7 \cdot 10^{10}}{2{,}67 \cdot 10^{21}} = \boxed{1{,}38 \cdot 10^{-11}\ \text{s}^{-1}}$$

b) La vida media es el tiempo de vida promedio de los átomos de una sustancia radiactiva:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1{,}38 \cdot 10^{-11}} = \boxed{7{,}25 \cdot 10^{10}\ \text{s}}$$

8 *Septiembre 99 - 1,25 puntos*

Se dispone de una muestra de 2 000 núcleos de un elemento radiactivo cuyo período de semidesintegración es T. ¿Cuántos núcleos permanecerán sin desintegrarse al cabo de un tiempo $t = T/2$?

El número de núcleos que permanecen sin desintegrar al transcurrir un tiempo t viene dado por:

$$N = N_0 \cdot e^{-\frac{\text{Ln}\,2}{T} t}$$

Sustituyendo los datos del problema:

$$N = 2\,000 \cdot e^{-\frac{\text{Ln}\,2}{T} \cdot \frac{T}{2}} = \boxed{1\,414 \text{ núcleos}}$$

9 *Septiembre 99 - 1,25 puntos*

Calcula la energía de enlace del núcleo del nitrógeno ($A = 14$, $Z = 7$) y su energía de enlace por nucleón. (Datos: $m_{(\text{neutrón})} = 1{,}008665$ u; $m_{(\text{protón})} = 1{,}007277$ u; $m_{(\text{N-14})} = 13{,}99922$; 1 u = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg; $c = 300\,000$ km/s.

El principio de convertibilidad de la masa en energía y viceversa, viene dado por la ecuación de Einstein:

$$E = \Delta m \cdot c^2$$

Como $A = 14$ es el número de protones $Z = 7$ más el de neutrones:

$$n = A - p = 14 - 7 = \text{neutrones}$$

El defecto de masa viene dado por la diferencia entre la masa de los nucleones y la masa del núcleo:

$$\Delta m = \sum m_{\text{nucleones}} - m_{\text{núcleo}} =$$

$$= \left((7 \cdot 1{,}007277 + 7 \cdot 1{,}008665) - 13{,}99922\right) \cdot 1{,}66 \cdot 10^{27} = 1{,}86 \cdot 10^{-28} \text{ kg}$$

Por tanto la energía de enlace será:

$$E_{\text{enlace}} = \Delta m \cdot c^2 = 1{,}865 \cdot 10^{-28} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 1{,}68 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

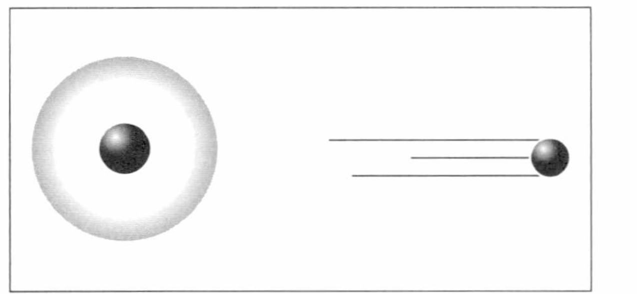
Siendo la energía de enlace por nucleón:

$$E_{\text{nucleón}} = \frac{E_{\text{enlace}}}{A} = \frac{1{,}68 \cdot 10^{-11}}{14} = \boxed{1{,}2 \cdot 10^{-12} \text{ J}}$$

10 *Junio 2000 - 1,25 puntos*

Determina el número atómico y el número másico del isótopo que resultará de $^{238}_{92}U$ después de emitir dos partículas alfa y tres beta.

Considerando que en cualquier reacción nuclear o transmutación, debe verificarse el principio de conservación de la carga y de la masa, y siguiendo las leyes de Soddy:



$$^{238}_{92}U \rightarrow \, ^{234}_{90}A + \, ^{4}_{2}He$$

$$^{234}_{90}A \rightarrow \, ^{230}_{88}B + \, ^{4}_{2}He$$

$$^{230}_{88}B \rightarrow \, ^{230}_{89}C + \, ^{0}_{-1}e$$

$$^{230}_{89}C \rightarrow \, ^{230}_{90}D + \, ^{0}_{-1}e$$

$$^{230}_{90}D \rightarrow \, ^{230}_{91}E + \, ^{0}_{-1}e$$

Por tanto el isótopo resultante tiene de número másico $\boxed{A = 230}$, y número atómico $\boxed{Z = 91}$.

11

Junio 97 - 1 punto

El tritio un isótopo radiactivo del hidrógeno, emite radiación beta con una vida media de 12,5 años. ¿Qué porcentaje de la muestra original quedará al cabo de 17,32 años?

Se llama vida media al tiempo de vida promedio de los átomos en una sustancia radiactiva, la expresión que sirve para calcular la vida media es:

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{12,5} \text{ años}^{-1}$$

El porcentaje de la muestra original que quedará al cabo de 17,32 años, sustituyendo en la ley de desintegración radiactiva será:

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t} = e^{-\frac{1}{12,5} \cdot 17,32} = 0,25$$

Luego:

$$\boxed{\frac{N}{N_0} = 25\%}$$

12

Septiembre 97 - 1 punto

De un cierto elemento radiactivo sabemos que inicialmente había 106 núcleos y que actualmente nos quedan 10^3 núcleos sin desintegrar. Si dicho elemento tiene un período de semidesintegración de 6 años. Calcula el tiempo que ha transcurrido.

El número de núcleos existentes N al transcurrir un tiempo t viene dado por la ecuación:

$$N = N_0 \cdot e^{-\frac{\text{Ln } 2}{T} t}$$

Aplicando logaritmos, obtenemos para t la siguiente expresión:

$$\text{Ln}\frac{N}{N_0} = -\frac{\text{Ln}\,2}{T}\cdot t \;\Rightarrow\; t = -\frac{\text{Ln}\frac{N}{N_0}}{\frac{\text{Ln}\,2}{T}} = -\frac{T\cdot\text{Ln}\frac{N}{N_0}}{\text{Ln}\,2}$$

Sustituyendo datos:

$$t = -\frac{6\cdot\text{Ln}\frac{10^3}{10^6}}{\text{Ln}\,2} = \boxed{59{,}8\ \text{años}}$$

13

Junio 98 - 1 punto

De una cierta sustancia radiactiva sabemos dos datos 10 s y 6,8 s. Son la vida media y el período de semidesintegración; pero no sabemos cual es cada uno. ¿Puedes tu identificarlos? Razona tu respuesta.

Las expresiones que sirven para calcular la vida media y el período de semidesintegración, conociendo la constante de desintegración son las siguientes:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{y} \qquad T = \frac{\text{Ln}\,2}{\lambda}$$

De las dos ecuaciones anteriores podemos obtener la que relaciona el período de semidesintegración y la vida media:

$$\frac{\tau}{T} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{\text{Ln}\,2}{\lambda}} = \frac{1}{\text{Ln}\,2} \;\Rightarrow\; T = \text{Ln}\,2\cdot\tau = 0{,}693\cdot\tau$$

Por tanto $\tau > T$. Si sustituimos:

$$\boxed{\tau = 10\ \text{s} \qquad \text{y} \qquad T = 6{,}8\ \text{s}}$$

Comprobamos la afirmación anterior:

$$T = \text{Ln}\,2\cdot\tau = 0{,}69\cdot 10 \approx 6{,}8\ \text{s}$$

14

Septiembre 98 - 1 punto

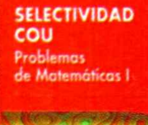
Se denominan núcleos doblemente mágicos a aquellos que tienen las capas de protones y neutrones totalmente llenas, debido a lo cual dichos núcleos son esféricos. Sabiendo que el oxígeno ($A = 16$) y el calcio ($A = 40$) son doblemente mágico, calcula el cociente entre el volumen del núcleo de Calcio y el de Oxígeno.

En estos casos el radio del núcleo puede calcularse muy aproximadamente por la fórmula:

$$R = 1{,}5\cdot 10^{-15}\cdot A^{1/3}\ \text{m}$$

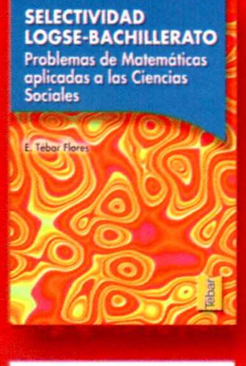
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

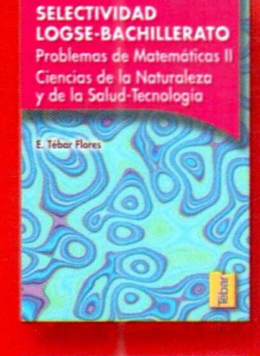
1. *Pruebas de aptitud para el Acceso a Facultades*, EE.TT.SS. y CC.UU.
2. J. A. De Lorenzo P. (1989): *Principios fundamentales de la Física de C.O.U.* Editorial Edunsa (Barcelona).
3. A. Peña Sainz / F. Garzo Pérez (1990): *Curso de Física de C.O.U.* Editorial McGraw-Hill (Barcelona).
4. M. A. Olarte / E. Lowry / J. L. Robles (1986): *Física de C.O.U.* Editorial S.M. (Madrid).
5. A. Candel / A. Sotoca / J. B. Soler / F. Tejerían / J. J. Tent (1990): *Física C.O.U.* Editorial Anaya (Madrid).
6. Jordi Peñar Roja (1980): *Ciencias aplicadas*. Editorial Bruguera, S.A. (Barcelona).
7. Joaquín Muñoz Puig / Genis Pascual Vives: *Altlas de Física*. Editorial Edibook (Barcelona).
8. Miguel Fispert Briansó / José Luis Hernández Neira (1998): *Física 2*. Editorial Bruño (Madrid).
9. Alberto Galindo / Antoni Moreno / Ángel Benedí / Paloma Varela (1998): *Física 2b*. Editorial McGraw-Hill (Aravaca - Madrid).
10. Ángel Peña / José A. García (1996): *Física 2b*. Editorial McGraw-Hill (Aravaca - Madrid).
11. Dulce María Ándrés / Juan Luis Antón / Javier Barrio / Mª Concepción de la Cruz / Fernando González: *Física 2b*. Editorial Editex (Madrid).
12. Eloy Enciso / Fernando Sendra / Salvador Lorente / Juan Quíles / Fernando Chorro (1998): *Física 2b*. Editorial Ecir (Paterna - Valencia).
13. J. Armero Rovira / D. J. Castello Castellano / T. García Pozo / M. J. Martínez de Murguía (1999): *Física 2b*. Editorial Edebé (Barcelona).
14. Cristóbal Lara / Julio Puente / Nicolás Romo (1998): *Física 2b*. Editorial S.M. (Madrid).
15. *Real Decreto 1178/1992 de 2 de octubre: Boe 21-10-92* (se establece el currículo del Bachillerato).

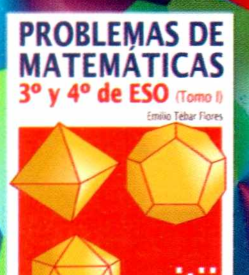




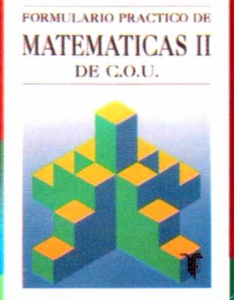


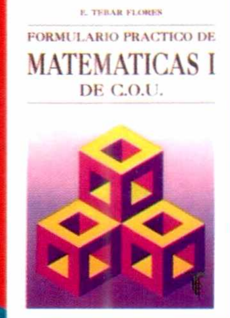




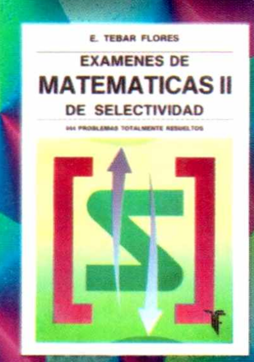


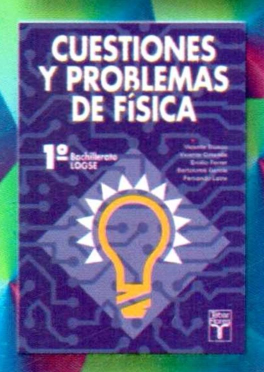




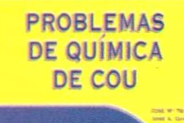


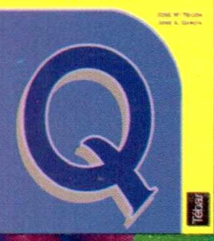


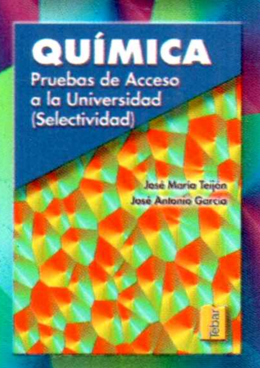


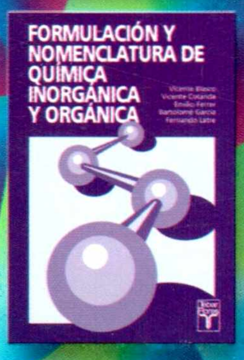


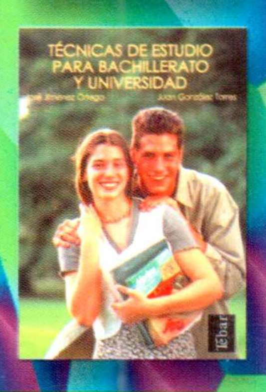













ISBN 84-95447-31-2
9 788495 447319

INFORMACIÓN: 91 373 44 94
91 316 69 52
Casa Editorial Mares - Editorial Tébar
C/ Isla de Saipán, 36, 1º-1 - 28035 Madrid